Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 24.06.16
Gesamtpunktzahl: 30+10*

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 10

> If you cannot solve the proposed problem, try to solve first a simpler related problem.
>
> — George Pólya (1887–1985)

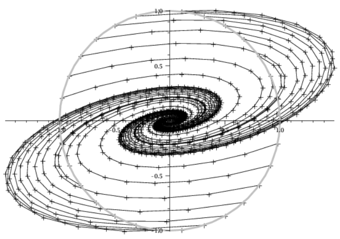
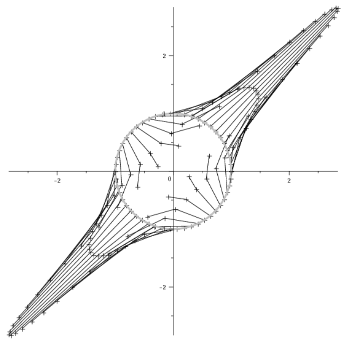
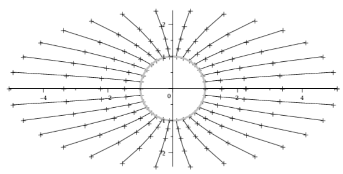
Präsenzaufgaben Woche 10

1. Hier geht es um Folgen der Bauart $x_k := A^k x_0$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix und x_0 ein vorgegebener Vektor ist.

Die Frage ist, was die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

mit den nachfolgenden Bildern zu tun haben. Was ist dabei abgebildet, welche Matrix gehört zu welcher Abbildung und wie kann man die Zuordnung über Eigenwerte und Eigenvektoren begründen?

2. (a) Finde linear unabhängige Elemente u, v von $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ so, dass $u(0), v(0)$ linear abhängig in $\mathbb{C}^2$ sind.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ mit $u'(t) = Au(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $v\colon t \mapsto u(t + t_0)$ die eindeutige Lösung in $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ der Gleichung $v'(t) = Av(t)$ mit $v(0) = u(t_0)$ ist.

Übungsaufgaben

1. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\mathscr{L} = \{u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : u' = Au\}$. (4+6)

(a) Seien $u^1, \ldots, u^m \in \mathscr{L}$. Zeige die Äquivalenz folgender Eigenschaften:

(i) $u^1, \ldots, u^m$ sind linear unabhängig in $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$.

(ii) $u^1(0), \ldots, u^m(0)$ sind linear unabhängig in $\mathbb{C}^n$.

(iii) $u^1(t_0), \ldots, u^m(t_0)$ sind linear unabhängig in $\mathbb{C}^n$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{C}^n$ und $t \in \mathbb{R}$, definiere $L(t,x) := u(t)$, wobei $u \in \mathscr{L}$ mit $u(0) = x$ (eindeutig nach Theorem 20.3). Zeige, dass es für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Matrix $S(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt mit $S(t)x = L(t,x)$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Zeige zudem, dass $S(t+s) = S(t)S(s)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und $S(0) = E_n$ gilt. Folgere, dass $S(t)$ invertierbar ist für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}(V)$ und $p \in \mathbb{C}[t]$. Zeige, dass (6)

$$\sigma(p(f)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(f)\} =: p(\sigma(f)).$$

Hinweis: Verwende den Hauptsatz der Algebra.

3. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definieren wir (8+4*)

$$\|A\|_\infty := \max\{|a_{ij}| : i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Es ist einfach zu sehen, dass es sich dabei um eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^{n\times n}$ handelt. Wir verwenden hier aber nur die Schreibweise $\|A^k\|_\infty \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, um auszudrücken, dass die Komponenten der Matrizen A^k unabhängig von $k \in \mathbb{N}_0$ durch eine Konstante C beschränkt sind.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J = J_n(\lambda)$. Zeige folgende drei Aussagen.

(1) Wenn $|\lambda| < 1$, dann gilt $J^k \to 0$ komponentenweise für $k \to \infty$.

(2) Wenn $|\lambda| > 1$, dann gibt es kein $C > 0$ mit $\|J^k\|_\infty \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(3) Wenn $|\lambda| = 1$, dann gibt es ein $C > 0$ mit $\|J^k\|_\infty \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ genau dann wenn $n = 1$.

(b) Beweise, dass es genau dann ein $C > 0$ mit $\|A^k\|_\infty \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, wenn $|\lambda| \le 1$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt und alle $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = 1$ Vielfachheit 1 in M_A haben.

4. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. (2+4+6*)

(a) Zeige, dass $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ähnlich, aber AB und BA nicht ähnlich sind.

(b) Zeige, dass AB und BA ähnlich sind, falls A (oder B) invertierbar ist. Zeige zudem, dass auch ohne Invertierbarkeit immer $P_{AB} = P_{BA}$ gilt.

Hinweis: Für den zweiten Teil, verwende den Determinantenmultiplikationssatz und die Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} -E_n & 0 \\ A & -E_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \lambda E_n & B \\ \lambda A & \lambda E_n \end{pmatrix}.$$

(c) Zeige, dass AB und BA genau dann ähnlich sind, wenn $\operatorname{Rang}(AB)^k = \operatorname{Rang}(BA)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folgere, dass AB und BA ähnlich sind, falls $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} AB = \operatorname{Rang} BA$.

Hinweis: Verwende Satz 15.3 und die erste Aussage aus dem vorigen Übungsteil. Für die zweite Aussage verwende $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A^T$ und eine Konsequenz von $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} AB$ für die Bilder dieser Abbildungen.

Diesmal gibt es aus Platzgründen nur einen Link zum Comic:
`http://www.smbc-comics.com?id=2861`