Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 01.07.16
Gesamtpunktzahl: 20+20*

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Sommersemester 2016

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 11

Wir müssen wissen, wir werden wissen.

— David Hilbert (1862–1943)

Präsenzaufgaben Woche 11

1. (a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass es kein Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ gibt, mit $(p(A))^2 = A$. Trotzdem gilt aber $B^2 = A$. Wie ist das zu erklären bzw. was bedeutet das im Kontext der Matrixfunktionen von Abschnitt 23?

(b) Seien $A = J_2(0)$ und $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = t^3$ und $g(t) = \operatorname{sgn} t \cdot |t|^{1/3}$. Zeige, dass f und $g \circ f$ auf dem Spektrum von A definiert sind, und dass g auf dem Spektrum von $f(A)$ definiert ist. Zeige zudem, dass $A = (g \circ f)(A) \neq g(f(A)) = 0$ gilt. Wieso widerspricht das nicht Proposition 23.4 (d)?

2. Betrachte folgende Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha i \\ -\alpha i & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} J_2(\alpha) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_3(2) \end{pmatrix}$$

Welche der Funktionen $f_1 = \exp$,

$$f_2(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{3}{2} < t < 3, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sind in Abhängigkeit von $\alpha \in (-1, 1)$ jeweils auf dem Spektrum der obigen Matrizen definiert? Bestimme $\operatorname{Exp}(A_1)$ und, falls definiert, die Matrixfunktionen $f_1(A_2)$, $f_2(A_2)$ und $f_3(A_2)$.

Übungsaufgaben

1. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\delta \in \mathbb{R}$. Zeige: Genau dann gilt $e^{t\delta} \operatorname{Exp}(tA) \to 0$ komponentenweise für $t \to \infty$, wenn $\operatorname{Re} \lambda < -\delta$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. (6)

2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar und f eine auf dem Spektrum von A definierte Funktion. Zeige, dann ist auch $f(A)$ diagonalisierbar. (2)

3. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Norm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ und $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar. Zeige, dann definiert auch $\|A\|_S := \|S^{-1}AS\|$ eine submultiplikative Norm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$. Sei (A_n) eine Folge und A in $\mathbb{K}^{n \times n}$. Zeige, dass genau dann $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ bezüglich $\|\cdot\|$ gilt, wenn dies bezüglich $\|\cdot\|_S$ gilt. (4*)

4. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $M_A = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{m_s}$ mit paarweise verschiedenen λ_k und $m_k \in \mathbb{N}$ für $k \in \{1, \dots, s\}$. Sei $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge von auf dem Spektrum von A definierten Funktionen. (5+5+2)

(a) Zeige, wenn $\lim_{N\to\infty} f_N^{(j)}(\lambda_k)$ für alle $k \in \{1, \dots, s\}$ und $j \in \{0, \dots, m_k - 1\}$ existiert, dann konvergiert $f_N(A)$ komponentenweise.

Hinweis: Stelle die Interpolationspolynome $p_N \in \mathbb{C}[t]$ mit $f_N(A) = p_N(A)$ durch eine Linearkombination von Basispolynomen dar, welche sich wie die Lagrange-Polynome verhalten.

(b) Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeige, wenn $f_N(A) \to B$ komponentenweise für $N \to \infty$ konvergiert, dann existieren die Grenzwerte $\beta_k^{(j)} := \lim_{N\to\infty} f_N^{(j)}(\lambda_k)$ für alle $k \in \{1, \dots, s\}$ und $j \in \{0, \dots, m_k - 1\}$, und es gilt $B = p(A)$ wenn $p \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom ist, welches auf dem Spektrum von A die Werte $\beta_k^{(j)}$ annimmt (also wenn $p^{(j)}(\lambda_k) = \beta_k^{(j)}$ für alle $k \in \{1, \dots, s\}$ und $j \in \{0, \dots, m_k - 1\}$).

Hinweis: Betrachte erst den Fall, dass A ein Jordanblock ist.

(c) Folgere, dass die über die Potenzreihe definierte Matrixexponentialfunktion $\operatorname{Exp}(A)$ mit der über das Interpolationspolynom definierten Matrixfunktion $\exp(A)$ übereinstimmt.

5. Bestimme die Jordansche Normalform der Matrix $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ gegeben durch (8*)

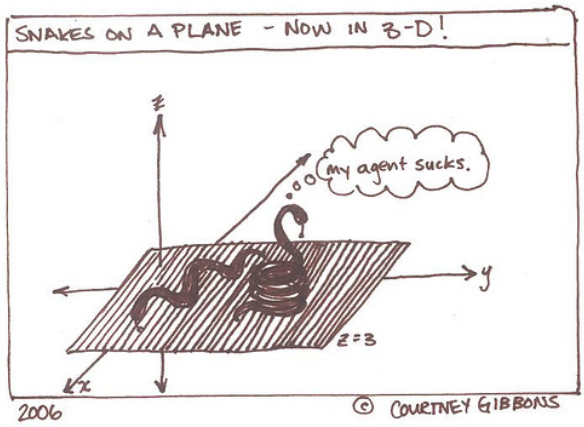
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

und eine Basis, bezüglich der f_A Jordansche Normalform hat.

Hinweis: A hat nur einen Eigenwert.

6. Zeige, dass $J_d(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ähnlich ist zu $\lambda E_d + \delta J_d(0)$ für alle $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Folgere damit, dass für alle $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\varepsilon > 0$ eine diagonalisierbare Matrix $A' \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existiert mit $\|A - A'\|_F < \varepsilon$. (8*)

Hinweis: Ähnlichkeitstransformation mit $S = \operatorname{diag}(\delta, \delta^2, \dots, \delta^d)$.



http://brownsharpie.courtneygibbons.org/?p=6