Übungen Geometrische Analysis: Blatt 3

1. (a) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutstetig. Zeige, auch $f \cdot g$ ist absolutstetig und

$$\int_a^b f'g = fg|_a^b - \int_a^b fg'.$$

(b) Wenn $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ in BV sind, ist dann auch $f \cdot g$ in BV?

(c) Gib ein Beispiel einer stetigen Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche nicht in BV ist.

2.* Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeige, dass f absolutstetig ist, genau dann wenn f stetig und in BV ist und Lusin (N) erfüllt.

Hinweis: Verwende ohne Beweis, dass $\lambda(f(A)) \leq L\lambda(A)$ falls A messbar und $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in A$ gilt.

3. (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ quasi-konvex für $C \geq 1$ und $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ lokal L-Lipschitz. Zeige, dass f dann (global) CL-Lipschitz ist.

(b) Seien $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ für alle $j \in J$ gegebene L-Lipschitz Funktionen. Dann sind auch $x \mapsto \sup_{j\in J} f_j(x)$ und $x \mapsto \inf_{j \in J} f_j(x)$ L-Lipschitz, falls diese an zumindest einem Punkt endlich sind.

(c) Sei $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mit $A \subset \mathbb{R}^d$ L-Lipschitz. Zeige, dass es eine $\sqrt{m}L$-Lipschitz Fortsetzung $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ von f gibt.