# Übungen Geometrische Analysis: Blatt 8

**1.** Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Eine $k$-rektifizierbare Menge hat $\sigma$-endliches $\mathcal{H}^k$-Maß.

(b) Jede Teilmenge einer $k$-rektifizierbaren Menge ist $k$-rektifizierbar (und entsprechend für total $k$-unrektifizierbar).

(c) Die abzählbare Vereinigung $k$-rektifizierbarer Mengen bleibt $k$-rektifizierbar.

(d) Für ein $k$-rektifizierbares $A \subset \mathbb{R}^d$ gibt es ein $k$-rektifizierbares $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $A \subset B$ und $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$. Gilt die analoge Aussage auch für total $k$-unrektifizierbare Mengen?

**2.** Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Wir definieren

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X)\}$$

für $X, Y \subset M$ nichtleer.

(a) Zeige, dass

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) = \inf\{\delta > 0 : X \subset [Y]_\delta, Y \subset [X]_\delta\},$$

wobei $[X]_\delta := \{y \in M : d(y, X) \leq \delta\}$.

(b) Sei $\mathcal{K} := \{K \subset M : K \text{ kompakt}, K \neq \emptyset\}$. Zeige, dass $d_{\mathcal{H}}$ eine Metrik auf $\mathcal{K}$ ist (die sogenannte Hausdorff-Metrik).

(c) Zeige: falls $(M, d)$ separabel ist, so ist $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$ separabel.

(d) Seien $V, W$ zwei $k$-dim. Untervektorräume von $\mathbb{R}^d$. Definiere

$$\hat{\delta}(V, W) := d_{\mathcal{H}}(V \cap \overline{B}^d(0,1), W \cap \overline{B}^d(0,1)),$$

wobei $d_{\mathcal{H}}$ natürlich bezüglich des euklidischen Abstands in $\mathbb{R}^d$ definiert sei. Zeige: $\hat{\delta}$ ist eine Metrik auf den $k$-dim. Untervektorräumen von $\mathbb{R}^d$ und

$$\hat{\delta}(V, W) = \max\{\|(I - P_V)P_W\|, \|(I - P_W)P_V\|\} \leq \|P_V - P_W\| \leq 2\hat{\delta}(V, W).$$

Bemerkung: Man kann beweisen, dass $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$ vollständig/kompakt ist, falls dies entsprechend für $(M, d)$ gilt. In der letzten Aufgabe gilt sogar durchgehende Gleichheit ohne den Faktor 2.

**3.** Ein $k$-dim. Lipschitz-Graph in $\mathbb{R}^d$ ist eine Menge der Form $\{x + f(x) : x \in V\}$, wobei $V$ ein $k$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^d$ und $f\colon V \to V^\perp$ Lipschitz ist.

(a) Zeige: $S \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer ist genau dann in einem $k$-dim. Lipschitz-Graph enthalten, falls es einen $k$-dimensionalen Unvervektorraum $V$ von $\mathbb{R}^d$ und ein $M \geq 0$ gibt mit

$$S \subset x + \{z \in \mathbb{R}^d : |(I - P_V)z| \leq M|P_V z|\}$$

für alle $x \in S$.

(b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass $\operatorname{gr} f$ nicht total 1-unrektifizierbar sein kann.