(3) $\exists R > 0: \quad \Omega \subset\subset B(0,R)$.

Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $E = F$ auf Ω^c. ~~Hdo~~

$$\Rightarrow V(\mathbb{1}_E, \mathbb{R}^d) \underset{1(a)}{=} V(\mathbb{1}_E, B(0,R)) + \underbrace{V(\mathbb{1}_E, \mathbb{R}^d \setminus B(0,R))}_{\substack{\| \\ V(\mathbb{1}_F,\, \mathbb{R}^d \setminus B(0,R)) = \\ \|D\mathbb{1}_F\|(\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)) \\ \text{unabhängig von } E.}}$$

Da wir $V(\mathbb{1}_E, \mathbb{R}^d)$ minimieren wollen, genügt es $V(\mathbb{1}_E, B(0,R))$ zu minimieren (unter NB $E = F$ auf Ω^c).

Sei (A_n) eine Folge mit $V(\mathbb{1}_{A_n}, B(0,R)) \longrightarrow \inf$, $A_n = F$ auf Ω^c

Da $E = F$ zulässig ist, gilt $\underset{\text{o.B.d.A.}}{}$ $V(\mathbb{1}_{A_n}, B(0,R)) \leq V(\mathbb{1}_{A_n}, \mathbb{R}^d)$

$\leq P(F, \mathbb{R}^d) < \infty$

Kompaktheitssatz

$\Rightarrow$ Da $\|D\mathbb{1}_{A_n}\|(B(0,R)) \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

folgt ~~KS~~ und TF gilt $\mathbb{1}_{A_n} \longrightarrow f$ in $L^1_{loc}(\cancel{B(0,R)})$ $\mathbb{R}^d$ und p.w. f.ü.

und $f = \mathbb{1}_F$ auf Ω^c

$\Rightarrow \exists A \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $f = \mathbb{1}_A$, $A = F$ auf Ω^c.

$$P(A, \mathbb{R}^d) \leq \liminf_{n \to \infty} \underbrace{V(\mathbb{1}_{A_n}, B(0,R))}_{\downarrow \, \inf} + \|D\mathbb{1}_F\|(\mathbb{R}^d \setminus B(0,R))$$

Damit ist A ein Minimierer. $\square$