Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Mittwoch, 02.11.16
Gesamtpunktzahl: 15

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 2

Quels que soient les progrès des connaissances humaines, il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité.

— Émile Borel (1871–1956)

1. (a) Sei Ω eine Menge, $\Omega' \subset \Omega$ und $\mathscr{E}$ eine Familie von Teilmengen von Ω. Definiere (6)

$$\mathscr{E}' := \{A \cap \Omega' : A \in \mathscr{E}\}.$$

Sei Σ die von $\mathscr{E}$ auf Ω erzeugte σ-Algebra und Σ' die von $\mathscr{E}'$ auf Ω' erzeugte σ-Algebra. Zeige: Es gilt

$$\Sigma' = \{A \cap \Omega' : A \in \Sigma\}.$$

Hinweis: Für die Inklusion von rechts nach links, zeige dass

$$\mathscr{G} := \{A \subset \Omega : A \cap \Omega' \in \Sigma'\}$$

eine σ-Algebra ist.

(b) Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $\Omega' \subset \Omega$. Dann ist auch (Ω', d') ein metrischer Raum, wobei d' die Einschränkung von d auf Ω' sei. Zeige, dass $\mathscr{B}(\Omega') = \{A \cap \Omega' : A \in \mathscr{B}(\Omega)\}$. Folgere, dass z.B. wenn Ω' offen in Ω ist, dann gilt $\mathscr{B}(\Omega') = \{A \subset \Omega' : A \in \mathscr{B}(\Omega)\}$. (2)

2. Sei Ω eine Menge und $A_1, \dots, A_n$ seien Teilmengen von Ω. Für alle $I \subset \{1, \dots, n\}$ definiere (5)

$$A_I := \bigcap_{k \in I} A_k \cap \bigcap_{k \notin I} A_k^c.$$

Zeige, dass die Familie $\{A_I : I \subset \{1, \dots, n\}\}$ eine Partition von Ω ist welche die σ-Algebra $\Sigma := \sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$ erzeugt. Beschreibe Σ mit Hilfe der (A_I) und folgere, dass Σ höchstens 2^{2^n} Elemente hat.

3. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und sei (A_n) eine Folge in Σ mit $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass ohne die Forderung $\mu(A_1) < \infty$ im Allgemeinen nicht $\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ gilt. (2)