Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Mittwoch, 09.11.16
Gesamtpunktzahl: 15

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 3

Der Wissenschaftler findet seine Belohnung in dem, was Poincaré die Freude am Verstehen nennt, nicht in den Anwendungsmöglichkeiten seiner Erfindung.

— Albert Einstein (1879–1955)

1. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und (A_n) eine Folge in Σ. Zeige, dass (2)

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2. Zeige, dass $\mu(A) := \lambda(A)+\sum_{k\in\mathbb{N}:2^{-k}\in A} 3^{-k}$ ein Maß auf $([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$ definiert. Hierbei ist λ das 1-dimensionale Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Bestimme falls möglich ein $b \in [0,1]$ mit $\mu([0,b]) = \frac{1}{2}$. (2)

3. Im folgenden bezeichne λ das d-dimensionale Lebesguemaß.

(a) Sei $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ orthogonal. Zeige, dass $U\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. (3)

(b) Sei μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ welches $\mu([0,1)^d) = c$ für ein $c > 0$ erfüllt. Zeige, dass $\mu = c\lambda$. (5)

Hinweis: Zeige $\frac{1}{c}\mu(Q) = \lambda(Q)$ für halboffene Quader Q mit rationalen Koordinaten. Verwende dann Approximation und die Eindeutigkeit des Lebesguemaßes.

(c) Sei $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ orthogonal und $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass $\lambda(UA) = \lambda(A)$ gilt. (3)

Hinweis: Verwende die beiden vorigen Aufgabenteile und betrachte $\lambda(U\mathcal{U}_1(0))$.