Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2016/2017

Abgabe: Mittwoch, 16.11.16
Gesamtpunktzahl: 15+5*

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 4

> What I don't like about measure theory is that you have to say "almost everywhere" almost everywhere.
>
> — Kurt Friedrichs (1901–1982)

1. (a) Zeige, dass $\{A \times B : A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\} \neq \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. (1)

(b) Zeige, dass $\{A \times B : A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. (4)

Hinweis: Prinzip der guten Mengen.

2. (a) Zeige: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $G \subset \mathbb{R}^d$ offen und dicht (also $\overline{G} = \mathbb{R}^d$) mit $\lambda(G) < \varepsilon$. (2)

(b) Sei $d, k \in \mathbb{N}$ mit $k < d$. Zeige, dass (2)

$$\lambda(\{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d : x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\}) = 0.$$

(c) Sei V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^d$. Zeige, wenn $\dim V < d$, dann gilt $\lambda(V) = 0$. (1)

Hinweis: Verwende den vorigen Aufgabenteil und Blatt 3, Aufgabe 3 (c). Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass es U orthogonal gibt mit $UV = \mathbb{R}^{\dim V} \times \{0\}^{d - \dim V}$.

3. (a) Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und μ ein endliches Borelmaß auf Ω. Zeige: Für alle $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge F und eine offene Menge G mit $F \subset A \subset G$ und $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. (5)

Hinweis: Prinzip der guten Mengen mit

$$\mathscr{G} := \{A \in \mathscr{B}(\Omega) : \forall \varepsilon > 0 \text{ gibt es } F \subset A \subset G,\ F \text{ abg.}, G \text{ offen und } \mu(G \setminus F) < \varepsilon\}.$$

Betrachte $\{x \in \Omega : d(x, A) < \frac{1}{n}\}$ um zu zeigen: $A \in \mathscr{G}$ wenn A abgeschlossen ist.

(b) Zeige, dass (5*)

$$\sup\{\lambda(K) : K \subset A \text{ kompakt}\} = \lambda(A) = \inf\{\lambda(G) : G \supset A \text{ offen}\}$$

für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt.