Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Mittwoch, 07.12.16
Gesamtpunktzahl: 15+5*

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 7

God does not care about our mathematical difficulties. He integrates empirically.

— Albert Einstein (1879–1955)

Wie üblich sei $\mathbb{R}$ mit der Borel σ-Algebra versehen und die Messbarkeit von Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ und $[0,\infty]$ verstehen wir wie in Definition 4.6.

1. Wir definieren auf $([0,1],\mathscr{B}([0,1]))$ das Maß $\mu = \frac{1}{7}\delta_0 + 3\lambda$, wobei δ_0 wie in Beispiel 1.10 das Dirac-Maß an der Stelle 0 bezeichnet. Auf $(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ definieren wir das Zählmaß ζ durch $\zeta(A) = \#A$ für $A \subset \mathbb{N}$ (also die Anzahl der Elemente von A). Sei $g\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ gegeben durch $g(n) = 2^{-n}$ und $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ durch (6)

$$f(x) = \begin{cases} 42 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{9815} & \text{für } x = 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne unter Verwendung der Definition 5.5 und Theorem 5.7 folgende drei Integrale:

$$\int_{\mathbb{N}} g \, \mathrm{d}\zeta, \qquad \int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}\mu, \qquad \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, \mathrm{d}\lambda$$

2. Seien (Ω,Σ) ein messbarer Raum und μ,ν seien zwei Maße auf (Ω,Σ) mit $\mu(A) \geq \nu(A)$ für alle $A \in \Sigma$. Sei $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar. Zeige, dass (3)

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu.$$

Hinweis: Zeige die Aussage zunächst für ein einfaches positives f.

3. Sei (Ω_1,Σ_1,μ) ein Maßraum und (Ω_2,Σ_2) ein messbarer Raum. Zudem sei $g\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Σ_1/Σ_2-messbare Funktion.

(a) Zeige, dass $\nu(A) := \mu(g^{-1}(A))$ für alle $A \in \Sigma_2$ ein Maß ν auf (Ω_2,Σ_2) definiert. (1)

Bem.: Das Maß ν wird mit $g_*(\mu)$ bezeichnet und Bildmaß von μ unter g genannt.

(b) Sei $f\colon \Omega_2 \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion und ν wie im vorigen Aufgabenteil. Zeige: Es gilt (4)

$$\int_{\Omega_2} f \, \mathrm{d}\nu = \int_{\Omega_1} f \circ g \, \mathrm{d}\mu.$$

Hinweis: Zeige die Aussage zunächst für ein einfaches positives f.

(c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ messbar und $h \in \mathbb{R}$. Zeige $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(\cdot + h) \, \mathrm{d}\lambda$. (1)

4. (a) Sei $\mathcal{F}$ eine abzählbare Familie von offenen Bällen $B_k = \mathcal{U}_{r_k}(x_k)$ in $\mathbb{R}^d$ mit $0 < r_k \leq 1$ und $x_k \in \mathbb{R}^d$. Für einen Ball $B = \mathcal{U}_r(x)$ bezeichne $\widetilde{B}$ den Ball $\mathcal{U}_{5r}(x)$. (3*)

Sei nun $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$. Zeige, es gibt eine Teilfamilie $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ aus paarweise disjunkten Bällen derart, dass $A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} \widetilde{B}$ gilt.

Hinweis: Seien $\mathcal{F}_n$ die Bälle aus $\mathcal{F}$ mit Radius in $(2^{-n}, 2^{-n+1}]$. Wähle nun für $n = 1,2,\ldots$ der Reihe nach immer eine beliebige Teilfamilie von Bällen in $\mathcal{F}_n$ aus, die zu den zuvor gewählten Bällen disjunkt ist und in $\mathcal{F}_n$ nicht mehr erweitert werden kann.

(b) Zeige, dass $A \subset \mathbb{R}^d$ genau dann eine Lebesgue Nullmenge ist, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Folge von offenen Bällen B_k gibt mit $A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ und $\sum_{k=1}^\infty \lambda(B_k) < \varepsilon$. (2*)