Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 8

> Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
>
> — Bertrand Russell (1872–1970)

1. Zeige oder widerlege: Jede monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar. (1)

2. Seien $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ gegeben. (2)
Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda$ existiert und berechne den Grenzwert.

3. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $\varepsilon > 0$.

(a) Zeige, dass $\lim_{M\to\infty} \int_{\{x\in\Omega : |f(x)|>M\}} |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. (2)

(b) Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit $\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ für alle $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) < \delta$. (2)

(c) Gib ein Beispiel von $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ mit $\int f \,\mathrm{d}\lambda = 0$ derart, dass es kein $R > 0$ gibt, für das eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus N$ mit $|x| > R$. (1)

4. (a) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$ Lipschitz stetig und $A \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass dann $f(A) \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^m)$. (2)

(b) Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$. Zeige: $TA \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\lambda}(TA) = |\det T| \cdot \tilde{\lambda}(A)$. (3)

Verwende dazu ohne Beweis, dass $T = UP$ für ein $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal und $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit (und damit auch symmetrisch) gilt. Dieses Resultat ist in der LA als *Polarzerlegung* bekannt. Verwende nun Hauptachsentransformation und Blatt 3, Aufgabe 3.

(c) Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n), \tilde{\lambda})$. Zeige: Es gilt (2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\tilde{\lambda} = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T \,\mathrm{d}\tilde{\lambda}.$$

Gilt das analog auch für $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und λ anstatt von $\widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\lambda}$?