Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 21.12.16
Gesamtpunktzahl: 15

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 9

Nicht etwa, daß bei größerer Verbreitung des Einblickes in die Methode der Mathematik notwendigerweise viel mehr Kluges gesagt würde als heute, aber es würde sicher viel weniger Unkluges gesagt.

— Karl Menger (1902–1985)

1. Sei $\mathscr{R}$ die Menge aller d-dimensionalen Quader der Form $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d)$ mit $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, d\}$. Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen disjunkter Quader in $\mathscr{R}$, also

$$\mathscr{S} := \Big\{ \bigcup_{k=1}^{m} Q_k : m \in \mathbb{N} \text{ und } Q_1, \ldots, Q_m \in \mathscr{R} \text{ paarweise disjunkt} \Big\}.$$

Für $A \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt definieren wir

$$m_*(A) := \sup\{\lambda(S) : S \in \mathscr{S} \text{ mit } S \subset A\}$$

und

$$m^*(A) := \inf\{\lambda(S) : S \in \mathscr{S} \text{ mit } A \subset S\}.$$

Wenn $m_*(A) = m^*(A)$ gilt, sagen wir (die beschränkte Menge) A ist *Jordan messbar* und nennen den Wert $m(A) := m_*(A) = m^*(A)$ den *Jordan Inhalt* von A.

(a) Sei $A = \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$ mit $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathscr{R}$. Zeige $A \in \mathscr{S}$, A Jordan messbar und $m(A) = \lambda(A)$. (2)

(b) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ Jordan messbar. Zeige, dass dann auch $\mathring{A}$ und $\overline{A}$ Jordan messbar sind und $m(\mathring{A}) = m(A) = m(\overline{A})$ gilt. (1)

(c) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ Jordan messbar. Zeige, dass dann $A \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ und $\tilde{\lambda}(A) = m(A)$ gilt. (2)

(d) Gib ein Beispiel von $A \in \mathscr{B}([0,1]^d)$, das nicht Jordan messbar ist. (2)

Folgere: Die Jordan messbaren Teilmengen von $[0,1]^d$ sind keine σ-Algebra auf $[0,1]^d$.

Hinweis: Arrangiere $m_*(A) = 0$ und $m^*(A) = 1$.

(e) Zeige: Für $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt gilt genau dann $\lambda(K) = 0$, wenn $m^*(K) = 0$. (2)

Hinweis: Verwende Blatt 7, Aufgabe 4 (b) für offene Quader.

(f) Zeige, dass eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ genau dann Jordan messbar ist, wenn $m^*(\partial A) = 0$. (2)

2. (a) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar. Zeige, dass $f \in \mathcal{L}^1([0,1], \widetilde{B}([0,1]), \tilde{\lambda})$. (1)

(b) Sei $A \subset [0,1]$. Zeige, dass A genau dann Jordan messbar ist, wenn $\mathbb{1}_A$ auf $[0,1]$ Riemann integrierbar ist. (2)

(c) Gib ein Beispiel einer Riemann integrierbaren Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche nicht Borel messbar ist. (1)

Hinweis: Wir hatten bei der Lösung von Aufgabe 3 (b) auf Blatt 5 gesehen, dass es eine Teilmenge der Cantormenge gibt, welche nicht Borel messbar ist.