Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Mittwoch, 11.01.17
Gesamtpunktzahl: 15+5*

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 10

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.

— David Hilbert (1862–1943)

1. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar. Seien $t > 0$ und $p > 0$. Zeige (2)

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq t\}) \leq t^{-p} \int_\Omega f^p(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

2. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für $A \subset M$ nichtleer definiere $d_A\colon M \to [0,\infty)$ durch $d_A(x) = d(x, A) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}$.

(a) Zeige, dass d_A Lipschitz stetig mit Lipschitz Konstante 1 ist. (2)

(b) Sei $A \subset M$ abgeschlossen und nichtleer. Zeige, dass $d_A(x) = 0$ genau dann wenn $x \in A$. (1)

(c) Seien $A, B \subset M$ abgeschlossen, nichtleer und disjunkt. Zeige, dass es eine stetige Funktion $f\colon M \to [0,1]$ gibt mit $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in B$. (2)

Hinweis: $d_A/(d_A + d_B)$.

3. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $\varepsilon > 0$. Zeige, es existiert eine einfache Funktion $g = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k \in \{1, \ldots, N\}$ und $\int_\Omega |f - g|\, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$. (4)

4. (a) Sei $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda(A) < \infty$. Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein stetiges $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ existiert mit $\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_A - f|\, \mathrm{d}\lambda < \varepsilon$ und kompaktem Träger (d.h. $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$ ist in einer kompakten Menge enthalten). (2)

Hinweis: Verwende Aufgabe 2 (c) und die Regularität des Lebesguemaßes.

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Zeige, dass stetige Funktionen $f_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger existieren, welche $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n|\, \mathrm{d}\lambda = 0$ erfüllen. (2)

5. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Nach der vorigen Aufgabe existieren stetige Funktionen $f_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n|\, \mathrm{d}\lambda < 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Für $k, N \in \mathbb{N}$ definiere (2*)

$$C_{k,N} := \bigcup_{n=N}^{\infty} \Big\{ x \in A : |f(x) - f_n(x)| > \frac{1}{k} \Big\}.$$

Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ existiert mit $\lambda(C_{k,N_k}) < \varepsilon 2^{-k}$.

(b) Definiere $C := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_{k,N_k}$. Zeige, dass $\lambda(C) < \varepsilon$ und die Folge (f_n) auf $A \setminus C$ gleichmäßig gegen f konvergiert. (3*)

Ist die Abbildung $h\colon A \setminus C \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = f(x)$ stetig?

Wir wünschen Euch frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!