Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 25.01.17
Gesamtpunktzahl: 15+2*

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 12

While writing my book [Stochastic Processes] I had an argument with Feller. He asserted that everyone said "random variable" and I asserted that everyone said "chance variable." We obviously had to use the same name in our books, so we decided the issue by a stochastic procedure. That is, we tossed for it and he won.

— Joseph L. Doob (1910–2004)

1. (a) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $p \in [1, \infty)$ und $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Zeige, dass $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ als abzählbare Vereinigung von Mengen mit endlichem Maß geschrieben werden kann. (3)

Gilt dies auch für $p = \infty$?

(b) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p, q \in [1, \infty]$. Zeige, dass die Menge (3)

$$\{f \in L^p(\Omega) : \|f\|_q \leq 1\}$$

abgeschlossen in $L^p(\Omega)$ ist.

(c) Finde in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ eine überabzählbare Familie disjunkter offener Bälle mit Radius 1. (1)

2. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Zeige: Genau dann ist $f = 0$ in L^1, wenn $\int_Q f \,\mathrm{d}\lambda = 0$ für alle kompakten Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ in $\mathbb{R}^d$ gilt. (4)

3. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[1, \infty)$ derart, dass $f \in \mathcal{L}^{p_k}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(a) Sei (p_k) uneigentlich konvergent gegen ∞. Zeige, dass $\|f\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|f\|_{p_k}$ gilt, wobei der Grenzwert im Fall von $\|f\|_\infty = \infty$ uneigentlich zu verstehen ist. (4)

(b) Sei (p_k) konvergent gegen $p \in [1, \infty)$. Zeige, dass $\|f\|_p = \lim_{k\to\infty} \|f\|_{p_k}$ gilt. (2*)