Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Mittwoch, 15.02.17
Gesamtpunktzahl: 15*

Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 15 (Probeklausur)

Der Umfang ist gegenüber einer zweistündigen Klausur etwa um ein Viertel reduziert. Zur Bearbeitung sind also 90 Minuten vorgesehen. Es wird stets eine vollständige Argumentation erwartet. Aussagen aus den Vorlesungen und Übungen dürfen verwendet werden.

1. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen.

(a) Die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) < \exp(-x)\}$ ist eine Borelmenge von $\mathbb{R}$. (1*)

(b) Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $A_n \in \Sigma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt (1*)

$$S := \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\} \in \Sigma.$$

(c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist $f^2\colon x \mapsto f(x)^2$ genau dann messbar, wenn f messbar ist. (1*)

(d) Sei (y_n) eine gegen $y \in \mathbb{R}$ konvergente Folge in $[0, \infty)$. Dann gilt (1*)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-y_n, y_n)} \,\mathrm{d}\lambda = \lambda([-y, y)).$$

(e) Sei $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ messbar und Riemann integrierbar auf $[0, b]$ für alle $b > 0$ mit (1*)

$$\sup_{b>0} \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1([0, \infty), B([0, \infty)), \lambda)$.

(f) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$ und $h\colon \Omega \to [0, \infty)$ eine Funktion. Dann ist die Menge (1*)

$$C := \{f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) : |f| \le h \ \mu\text{-f.ü. in } \Omega\}$$

abgeschlossen in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

2. Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $f_1, f_2\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Wir definieren $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ als $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$. (2*)

Zeige: Genau dann sind f_1 und f_2 messbar, wenn $F^{-1}(A) \in \Sigma$ für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.

3. Sei $F\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ monoton wachsend und stetig. Wir setzen folgendes Resultat aus Abschnitt 14 im Vorlesungsskript voraus: Es existiert ein eindeutiges Borelmaß λ_F auf $\mathbb{R}$ mit $\lambda_F([a, b)) = F(b) - F(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei nun F zudem differenzierbar mit stetiger Ableitung.

(a) Zeige, dass (2*)

$$\lambda_F(A) = \int_A F' \,\mathrm{d}\lambda$$

für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar. Zeige, dass $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_F)$ genau dann, wenn $g \cdot F' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Zeige zudem, dass in diesem Fall (3*)

$$\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\lambda_F = \int_{\mathbb{R}} g \cdot F' \,\mathrm{d}\lambda.$$

4. Sei $d \in \mathbb{N}$ und $s \in (0, \infty)$. Für alle $A \subset \mathbb{R}^d$ und $\delta > 0$ definiere (2*)

$$\mu^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} r_k^s : A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{r_k}(x_k) \text{ mit } x_k \in \mathbb{R}^d \text{ und } r_k \in (0, \delta) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Zeige, dass $\mu^s(A) := \sup\{\mu^s_\delta(A) : \delta \in (0, 1]\}$ ein äußeres Maß definiert.