ulm university universität
uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2016/2017

Klausur zur Maßtheorie

9. März 2017; Bearbeitungszeit 120 Minuten; 100 Punkte insgesamt

Es wird stets eine vollständige Argumentation erwartet. Wie üblich bezeichne λ das Lebesguemaß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

1. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen. Es gibt ausschließlich Punkte für eine richtige Begründung.

(a) Es gilt $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ für (5)
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x < \exp y\}.$$

(b) Es gibt $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ derart, dass $f \notin L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. (5)

(c) Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Σ. Dann ist (5)
$$M := \{x \in \Omega : \text{es existiert ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in A_n \text{ für alle } n \geq N\} \in \Sigma.$$

(d) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel messbar. Dann ist $\{f(B) : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. (5)

(e) Es seien $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \varepsilon\}) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 0$. (5)

(f) Es gilt (5)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \Big(\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n(1+x)}} + x^n \Big) \,\mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

(g) Seien $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ sei definiert durch $f(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$. Dann ist f messbar und $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda$. (5)

(h) Sei μ ein endliches Borelmaß auf $[0,1]$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} t^n \,\mathrm{d}\mu(t) = 0$. (5)

2. Zeige, dass (10)
$$\int_{(0,1)} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \Big) \,\mathrm{d}\lambda(x) = 1.$$

3. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $p, q \in [1, \infty)$. Seien $f_n \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $g \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Zeige: Wenn $f_n \to f$ in L^p und $f_n \to g$ in L^q, dann folgt $f = g$. (5)

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass $G := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ eine Nullmenge bezüglich des 2-dimensionalen Lebesguemaßes auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ ist. (10)

5. (a) Geben Sie die Definition eines Dynkinsystems auf einer Menge Ω und formulieren Sie ein zentrales Resultat aus der Vorlesung, welches impliziert, dass das von einem $\mathcal{E} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ erzeugte Dynkinsystem eine σ-Algebra ist. (10)

(b) Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit $\mu([t,\infty)) = \mu((-\infty, -t])$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann $\mu(A) = \mu(-A)$ für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gilt. (10)

Bemerkung: Hierbei gilt $-A := \{-x : x \in A\}$. Wir wissen, dass $-A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

6. Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum, Ω' eine nichtleere Menge und $T\colon \Omega' \to \Omega$ eine Abbildung.

(a) Zeige, dass $\Sigma' := \{T^{-1}(A) : A \in \Sigma\}$ eine σ-Algebra auf Ω' ist. (5)

(b) Wir versehen Ω' mit der σ-Algebra Σ'. Sei $f\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ messbar. Zeige, dass dann ein $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar existiert mit $f = g \circ T$. (10)

Hinweis: Für welche Funktionen f ist dies besonders einfach?