Lösungen Maßtheorie Blatt 15 (Probeklausur)

|1| (a) Richtig. $M = [h<0] = h^{-1}((-\infty,0))$ mit der stetigen und damit (Borel) messbaren Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \sin x - \exp(-x)$

$\Rightarrow M$ Borel

(b) Richtig, denn $S \overset{!}{=} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n\geq k} A_n}_{\in \Sigma} \in \Sigma$

Γ „$\subset$“ $x \in S \Rightarrow \exists (n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, streng monoton wachsend mit $x \in A_{n_m}\ \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcup_{n\geq k} A_n\ \forall k$

$\Rightarrow x$ ist in der rechten Menge enthalten

„$\supset$“ $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}\ \exists n_k \geq k : x \in A_{n_k} \Rightarrow x \in S$ $\lrcorner$

(c) Falsch. Sei $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (exc. nach Vorlesung).

$f := \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus A}$ ist nicht messbar, denn $f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}) = A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

aber $f^2 \equiv 1$ ist messbar.

(d) Richtig: (y_n) ist als konv. Folge beschränkt, d.h.

$\exists M>0 : [-y_n, y_n) \subset [-M,M]\ \forall n \in \mathbb{N}$

Es gilt $\overset{\forall n}{} |\mathbb{1}_{[-y_n,y_n)}| \leq \mathbb{1}_{[-M,M]}$ überall auf $\mathbb{R}$

und $\mathbb{1}_{[-y_n,y_n)} \to \mathbb{1}_{[-y,y)}$ p.w. überall auf $\mathbb{R}\setminus\{-y,y\}$,

also insbesondere p.w. λ-f.ü.

$\overset{\text{Lebesgue}}{\underset{\text{DOM}}{\Longrightarrow}} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[y_n,y_n)}\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[-y_n,y_n)}\,d\lambda$

$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-y,y)}\,d\lambda \underset{\text{Def. Int.}}{=} \lambda([-y,y))$.

(e) Richtig. Es gilt $f \geq 0$ und

$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda \underset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sup_{N\in\mathbb{N}} \int_{[0,N]} f\,d\lambda \underset{\text{„=“ Riemann-Int da } f|_{[0,N]} \text{ R-int + messbar}}{\overset{\text{Lebesgue-Int.}}{=}} \sup_{N\in\mathbb{N}} \int_0^N f(t)\,dt < \infty$

Also ist $f \in \mathcal{L}^1([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), \lambda)$.

(f) Richtig. Sei (f_n) Folge in C mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$

z.z.: $f \in C$

Nach TF: $f_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ <u>und</u> p.w. μ-f.ü.,

also z.B. außerhalb einer μ-Nullmenge N_0

Außerdem $\exists\, N_k \in \Sigma$ μ-Nullmenge mit $|f_{n_k}(x)| \le h(x)$ $\forall x \in \Omega \setminus N_k$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$N := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \cup N_0$ ist μ-Nullmenge.

$\forall x \in \Omega \setminus N$ gilt $|f_{n_k}(x)| \le h(x)$ $\forall k$ <u>und</u> $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$

$\Longrightarrow |f(x)| \le h(x)$ $\forall x \in \Omega\setminus N$, also $f \in C$.

|2| „$\Leftarrow$" Es gilt $F^{-1}(U_1 \times \mathbb{R}) = f_1^{-1}(U_1)$ $\forall U_1 \subset \mathbb{R}$ offen.

Da $U_1 \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ($U_1 \times \mathbb{R}$ ist offen) und $F^{-1}(U_1\times\mathbb{R}) \in \Sigma$

(1P) folgt $f_1^{-1}(U_1) \in \Sigma$ $\forall U_1 \subset \mathbb{R}$ offen.

$\underset{\text{Satz aus Vorlesung}}{\Longrightarrow}$ f_1 messbar.

Analog für f_2.

„$\Rightarrow$" Seien f_1, f_2 messbar.

$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : F^{-1}(A) \in \Sigma\}$

1) Klar: alle offenen beschränkten Quader $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$

sind in $\mathcal{G}$, denn $F^{-1}(Q) = \underbrace{f_1^{-1}((a_1,b_1))}_{\in\Sigma} \cap \underbrace{f_2^{-1}((a_2,b_2))}_{\in\Sigma} \in \Sigma$

(1P)

2) <u>Bel.</u>: $\mathcal{G}$ ist σ-Algebra.

(a) $\emptyset \in \mathcal{G}$

(b) $A \in \mathcal{G} \Rightarrow F^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^d \setminus A}_{A^c}) = \Omega \setminus F^{-1}(A) \in \Sigma$

(c) (A_n) Folge in $\mathcal{G} \Rightarrow F^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-1}(A_n) \in \Sigma$

$\overset{1)+2)}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

|3| (a) Es gilt $F' \geq 0$ und F' ist messbar, da stetig.

$$\Rightarrow \quad \mu(A) := \int_A F' \, d\lambda \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

def. laut Vorlesung ein Borel-Maß.

1P

$$\mu([a,b)) = \int_{[a,b)} F' \, d\lambda \underset{\substack{F' \text{ stetig auf } \mathbb{R} \\ \text{und damit auf jedem} \\ \text{beschränkten Intervall} \\ R\text{-int}}}{\overset{\lambda(\{b\})=0}{=}} \int_a^b F'(t)\,dt \underset{\text{Hauptsatz}}{=} F(b) - F(a)$$

$$= \lambda_F([a,b))$$

μ und λ_F stimmen auf $\mathcal{E} := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$ überein. Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

1P

und $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n)$ mit $\mu([-n,n)) = F(n) - F(-n) < \infty \ \forall n$ gilt, ist Satz 11.8 (Eindeutigkeitssatz für Maße) anwendbar:

$$\Rightarrow \quad \lambda_F = \mu \text{ auf ganz } \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(b) Wir zeigen die Aussage durch "algebraische Induktion" über g:

1) Sei $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \geq 0$ einfach, (A_k) pw. disjunkt, und messbar

$$\Rightarrow \int g \, d\lambda_F = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_F(A_k) \underset{(a)}{=} \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{A_k} F' \, d\lambda$$

$$\underset{\text{Linearität}}{=} \int \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} F' \, d\lambda = \int g \cdot F' \, d\lambda$$

2) Sei g positiv (d.h. ≥ 0) und messbar

$\overset{\text{Vorlesung}}{\Rightarrow}$ $\exists\, (g_n)$ einfach, positiv, messbar, pw. monoton wachsend gegen g

$$\int g \, d\lambda_F \underset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sup_n \int g_n \, d\lambda_F \underset{1)}{=} \sup_n \int \underbrace{g_n \cdot F'}_{\geq 0,\text{ monoton wachsend gegen } g\cdot F'} d\lambda$$

$$\underset{\text{Beppo-Levi}}{=} \int g \cdot F' \, d\lambda$$

3) Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar.

Dann gilt wegen 2)

$$\int |g| \, d\lambda_F = \int |g| \cdot F' \, d\lambda = \int g^+ \cdot F' + g^- \cdot F' \, d\lambda$$

$$= \int g^+ + g^- \, d\lambda_F \implies g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_F)$$

$$\iff g \cdot F' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$$

Falls $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_F)$, d.h. $\int g^+ d\lambda_F < \infty$ und $\int g^- d\lambda_F < \infty$

gilt $\int g \, d\lambda_F = \int g^+ \cdot F' \, d\lambda - \int g^- \cdot F' \, d\lambda = \int g \cdot F' \, d\lambda$.

|4| 1) $\mu_\delta^s(\emptyset) \leq \sum_{k=1}^\infty r_k^s = \varepsilon \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = \varepsilon$

$\emptyset \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{r_k}(0)$ mit $r_k = (\varepsilon \cdot 2^{-k})^{1/s} < \delta$

falls $\varepsilon < \delta^s$

0,5 P

$\overset{\forall \varepsilon > 0}{\implies} \mu_\delta^s(\emptyset) = 0$

$\overset{\sup_{\delta \in (0,1]}}{\implies} \mu^s(\emptyset) = 0$

2) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ und (A_n) Folge in $\mathbb{R}^d$ mit $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Sei $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$ existieren $r_{k,n} \in (0, \delta)$ und $x_{k,n} \in \mathbb{R}^d$

mit $A_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{r_{k,n}}(x_{k,n})$

1,5 P

und $\sum_{k=1}^\infty r_{k,n}^s \leq \mu_\delta^s(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}$ (*)

<u>Beachte</u>: $\mathbb{R}^d$ kann mit abz. viele Bälle mit Radius $< \delta$ überdeckt werden und (*) gilt trivialerweise falls $\mu_\delta^s(A_n) = \infty$

Da $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{r_{k,n}}(x_{k,n})$ folgt

$$\mu_\delta^s(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty r_{k,n}^s \underset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^\infty \left(\mu_\delta^s(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu_\delta^s(A_n) + \varepsilon$$

$\overset{\forall \varepsilon > 0}{\implies} \mu_\delta^s(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_\delta^s(A_n) \overset{\sup_\delta \text{ rechts}}{\implies} \mu_\delta^s(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^s(A_n) \underset{\sup_\delta \text{ links}}{\implies} \mu^s(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^s(A_n)$

Also ist μ^s ein äußeres Maß.