Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 02.11.17
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 2

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Zeige folgende Aussagen nur unter Verwendung der Körper- und Anordnungsaxiome, und der explizit in der Vorlesung bewiesenen daraus abgeleiteten Regeln:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt (1)

$$x(-y) = -(xy) \quad \text{und} \quad (-x)(-y) = xy.$$

(b) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $z < 0$. Dann folgt $xz > yz$. (1)

2. Seien $x, y \neq 0$. Zeige (1)

$$\left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right| \geq 2.$$

3. Sei $M := \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist M nach oben und unten beschränkt? Bestimme im Falle der Existenz (natürlich mit Beweis) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von M. (3)

4. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkt und nichtleer. Zeige, dass (2)

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

5. Beweise: Es gilt (2)

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Weitere Aufgaben zur Übung

6. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. Wann genau gilt Gleichheit in der obigen Ungleichung?

7. (a) Bestimme, für genau welche $x \in \mathbb{R}$ folgende Ungleichung gilt:

$$|x+2| > |x-3|.$$

(b) Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Ungleichungskette gilt:

$$4xy \leq (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2).$$

8. Gegeben sei die Menge reeller Zahlen

$$M := \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ist M nach oben und unten beschränkt? Bestimme im Falle der Existenz (natürlich mit Beweis) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von M.

9. Diese Aufgabe ist nicht unbedingt schwierig, aber doch etwas aufwendig.

(a) Definiere auf $\mathbb{R}$ die zwei Operationen $\oplus$ und $\odot$ durch

$$a \oplus b := a + b + 1 \quad \text{und} \quad a \odot b := a + b + a \cdot b$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. (Dabei sind $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$.) Zeige, dass $\mathbb{R}$ versehen mit $\oplus$ als Addition und $\odot$ als Multiplikation ein Körper ist. Diesen Körper bezeichnen wir nun mit K.

(b) Kann man auf K eine Anordnung $\otimes$ definieren, welche K zu einem angeordneten Körper macht?