Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Donnerstag, 09.11.17
Gesamtpunktzahl: 10

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 3

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Zeige, dass (2)

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Beweise: (2)

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{Z} : \left| a - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{2n}$$

3. Bestimme alle reellen Zahlen x mit (1)

$$x^3 - 8 \geq -2x(x-2).$$

4. Es sei (2)

$$M := \left\{ \frac{n-m+1}{n+3m} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \cup (0, 1].$$

Bestimme im Falle der Existenz (natürlich mit Beweis) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von M.

5. Seien $A, B \subset \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Zeige: Dann gilt (3)

$$\inf\{ab : a \in A \wedge b \in B\} = (\inf A)(\inf B)$$

sofern $\inf A$ und $\inf B$ existieren. Gilt diese Identität auch für allgemeine nichtleere und beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$?

Weitere Aufgaben zur Übung

6. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

Gib eine analoge Formel für $\min\{x, y\}$ an.

7. Seien $x, y > 0$ reell und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\sqrt[n]{x + y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$.

Hinweis: Binomischer Lehrsatz

8. Bestimme jeweils im Falle der Existenz (natürlich mit Beweis) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von M.

(a) $M := [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$

(b) $M := \{x \in \mathbb{R} : x(x - 1)(x + 2) > 0\}$

9. Zeige, dass zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen immer eine irrationale reelle Zahl liegt.

10. (a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n > 0$ reell mit $\prod_{k=1}^{n} a_k = 1$. Zeige:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \geq 1,$$

und Gleichheit gilt genau dann wenn $a_k = 1$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Hinweis: Induktion nach n.

(b) Sei $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < q < 1$. Zeige, dass dann

$$(1 + x)^q < 1 + qx$$

für alle $x > -1$ mit $x \neq 0$ gilt.

Hinweis: Trickreiche Anwendung des vorigen Aufgabenteils.