Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 16.11.17
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 4

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. (a) Sei (2)

$$z := \frac{-5 + i3\sqrt{3}}{2 + i4\sqrt{3}}.$$

Zeige, dass dann die Menge

$$M := \{z^n : n \in \mathbb{N}\}$$

endlich ist und gib M durch Auflistung an; schreibe die entsprechenden komplexen Zahlen immer in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Beschreibe folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$ geometrisch mit einer Skizze: (1)

$$A := \{z \in \mathbb{C} : z \in \overline{B}(i, |z+2|) \text{ und } |z + \tfrac{3}{4}| \geq \tfrac{3}{4} \text{ und } \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

2. (a) Zeige, dass $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{\frac{1}{42}\}$ gleichmächtig sind. (1)

(b) Beweise, dass $[0, 1]$ und $[0, 1)$ gleichmächtig sind. (1)

3. Beweise direkt mit Definition 3.3 (also insbesondere ohne Grenzwertrechenregeln), dass die komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch (2)

$$a_n = \frac{3n^3 + n^2 - 2}{(1-i)n^3 + 5(-1)^n n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

konvergiert.

4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{C}$. Zeige, dass genau ein $b \in \mathbb{C}$ derart existiert, dass die Folge (b_n) gegeben durch (3)

$$b_n := \begin{cases} a_{5k} + \frac{2k+1}{n} & \text{falls } n = 2k \text{ gerade ist,} \\ b & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

konvergiert.

Weitere Aufgaben zur Übung

5. Beweise, dass auf $\mathbb{C}$ keine Anordnung definiert werden kann, wodurch $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper wird.

6. (a) Berechne

$$\sqrt[1337]{\left|\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{25543}\right|}.$$

(b) Schreibe die komplexen Zahlen

$$\frac{12+5i}{2+3i} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+i}}$$

in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

7. Zeige die Parallelogrammgleichung

$$2(|z|^2+|w|^2) = |z+w|^2 + |z-w|^2$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

8. Beschreibe folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ geometrisch. (Skizze!)

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+1| \leq 3\}$

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq |z-i| \leq |z-1|\}$

9. Beweise direkt mit Definition 3.3 (also insbesondere ohne Grenzwertrechenregeln), dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+2n+2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

konvergiert.

10. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach unten beschränkt. Zeige, dass dann eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A.$$