Übungen zur Analysis 1: Blatt 5

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Untersuche folgende Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{n^3}{n^2+3} - \dfrac{2n^2}{2n+1}$ (1)

(b) $a_n = \sqrt[n]{n^3+3n^2-4}$ (1)

(c) $a_n = \dfrac{(n+10)!}{n^n}$ (1)

(d) $a_n = \Big(1 - \dfrac{1}{n^2+1}\Big)^{-n}$ (1)

(e) $a_n = n^k z^n$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ fest gewählt seien. (2)

2. Zeige, dass die durch (2)

$$a_{n+1} := \frac{a_n^2+2}{3}$$

und $a_1 := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

3. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann (2)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Hinweis: Aufgabe 6 auf der Rückseite und Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel (siehe auch Blatt 3, Aufgabe 10 (a)).

Weitere Aufgaben zur Übung

4. Untersuche folgende Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2017}$

(b) $a_n = \frac{2^n+1}{3^n}$

(c) $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k+1}{3^k}$

(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(e) $a_n = \sqrt{n^2+5n} - n$

(f) $a_n = \sqrt[n]{x^n+y^n}$ mit $x, y \geq 0$ fest gewählt seien.

5. Sei $a_1 > 0$ fest. Zeige, dass die durch

$$a_{n+1} := a_n + \frac{1}{a_n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton, aber nicht beschränkt ist.

6. Sei (a_n) eine komplexe Folge, welche gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeige, dass dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = a.$$