Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2017/2018

Abgabe: Donnerstag, 30.11.17
Gesamtpunktzahl: 10

Übungen zur Analysis 1: Blatt 6

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Man bestimme für jede der folgenden beschränkten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Menge aller ihrer Häufungspunkte. Wie üblich bezeichne dabei $\lceil a \rceil$ für ein $a \in \mathbb{R}$ die kleinste ganze Zahl k mit $k \geq a$.

(a) $a_n = \dfrac{(-in)^2 + 5n - 12}{2(-1)^n n^2 - 4n}$ (1,5)

(b) $a_n = \left\lceil \dfrac{n}{5} \right\rceil - \dfrac{n}{5}$ (1,5)

2. (a) Zeige, dass es keine beschränkte reelle Folge gibt, welche genau (1)

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

als Menge aller ihrer Häufungspunkte hat.

(b) Zeige, dass es eine beschränkte reelle Folge gibt, welche genau (1)

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

als Menge aller ihrer Häufungspunkte hat.

Bei dieser Aufgabe genügt es, eine Folge mit der gewünschten Eigenschaft anzugeben. Wir verzichten dabei auf den Nachweis, dass die Eigenschaft tatsächlich vorliegt.

3. Seien (a_n) und (b_n) beschränkte reelle Folgen. Zeige oder widerlege (mit Gegenbeispiel) die folgenden Aussagen:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ (1)

(b) $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$ (1)

(c) $\liminf_{n\to\infty}(a_n - b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n - \limsup_{n\to\infty} b_n$ (1)

4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge derart, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch (2)

$$c_n = n(n+1)|a_{n+1} - a_n|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, eine Nullfolge ist. Beweise, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Weitere Aufgaben zur Übung

5. Untersuche folgende Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \sqrt[n]{(2n)!}$

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

(c) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$

(d) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

6. Man bestimme für jede der folgenden beschränkten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Menge aller ihrer Häufungspunkte.

(a) $a_n = 2^{-n}(1+i)^{2n}$

(b) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^n$

(c) (a_n) sei eine beliebige Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und (b_n) eine konvergente komplexe Folge. Es sei $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ und K sei die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zeige, dann gilt $K \neq \emptyset$ und $\{a + b : a \in K\}$ ist die Menge aller Häufungspunkte der Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Unter welcher Voraussetzung an b gilt die entsprechende Aussage auch, wenn man oben beide Mal die Additionen durch Multiplikation ersetzt?

8. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge und $s \in \mathbb{R}$. Zeige, dass genau dann $\limsup_{n\to\infty} a_n = s$ gilt, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(A) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > s - \varepsilon$.

(B) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > s + \varepsilon$.

9. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeige, dass

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\{\inf\{a_n : n \geq N\} : N \in \mathbb{N}\} = \lim_{N\to\infty} \inf\{a_n : n \geq N\}.$$

10. Zeige: Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

Hinweis: Was kann man machen, wenn für unendlich viele n gilt, dass $a_n > \limsup_{n\to\infty} a_n$?