Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Donnerstag, 07.12.17
Gesamtpunktzahl: 10

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 7

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Untersuche, welche der folgenden Reihen konvergieren und welche absolut konvergieren. (5 × 1)

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{k+42}-\sqrt{k})$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-42k}{(-1)^k k^4+5k^2}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{k+1}{2k-1}\Big)^k$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{k^k}$

2. Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen.

(a) Zeige: Wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}}.$$

(b) Zeige: Wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, dann divergiert die Reihe (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}}.$$

(c) Zeige: Die Reihe (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}^2}$$

konvergiert.

3. Sei $z\in\mathbb{C}$ und $m\in\mathbb{N}_0$. Beweise, dass (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^m z^k$$

genau dann konvergiert, wenn $|z|<1$.

Weitere Aufgaben zur Übung

4. Untersuche, welche der folgenden Reihen konvergieren und welche sogar absolut konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-5\cdot 2^k}{3^k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k-42}{k^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} 4^{-k}$

5. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge positiver reeller Zahlen mit $\liminf_{n\to\infty} a_n > 0$. Zeige, dass dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\prod_{j=1}^{k}(1+a_j)}$$

konvergiert.

6. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Zeige, dass dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k b_k)$ absolut konvergiert.

Zeige: Ein entsprechendes Resultat gilt nicht, wenn man oben beide Mal „absolut“ entfernt.

7. (a) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{2(n+1)} \le (1+\tfrac{1}{n})^n\Big((1+\tfrac{1}{4n(n+1)})^n - 1\Big) = (1+\tfrac{1}{2n})^{2n} - (1+\tfrac{1}{n})^n \le e - (1+\tfrac{1}{n})^n \le \frac{e}{n}.$$

(b) Zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(e-(1+\tfrac{1}{k})^k\Big)$$

divergiert, aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\varepsilon}\Big(e-(1+\tfrac{1}{k})^k\Big)$$

für alle $\varepsilon > 0$ konvergiert.

8. (a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei komplexe Folgen. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) b_n + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j\Big)(b_k - b_{k+1})$$

gilt.

(b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei konvergent. Zeige, dass dann $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k b_k)$ konvergiert.