Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2017/2018

Abgabe: Donnerstag, 11.01.18
Gesamtpunktzahl: 10+10*

Übungen zur Analysis 1: Blatt 9

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind diesmal zusätzliche Übungsaufgaben, mit denen man sich Bonuspunkte verdienen kann!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch!

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^2 - 42z + 5$. (Wir wissen, dass f stetig ist.) (2)

Bestimme zu $\varepsilon > 0$ nun konkret ein $\delta > 0$ mit $|f(z) - f(1+i)| \leq \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - (1+i)| \leq \delta$.

2. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeige, dass dann auch die Funktion $M\colon D \to \mathbb{R}$ definiert durch $M(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ stetig ist. (2)

Gilt die entsprechende Aussage auch, wenn man oben „stetig“ beide Mal durch „gleichmäßig stetig“ ersetzt?

3. Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [0,1]$. Zeige: Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x)| > \delta$ für alle $x \in [0,1]$. (2)

4. An genau welchen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig? (4×1)

(a) $f(x) = \max\{|\sin(x)|, \exp(-|x|)\}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+2x^2-4x}{x^2-4} & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \\ 0 & \text{falls } x = 2 \\ -3 & \text{falls } x = -2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{falls } x \leq 0, \\ x^2 - x + a & \text{falls } x > 0, \end{cases}$ wobei $a \in \mathbb{R}$ fest

(d) $f(x) = [x] + (x - [x])^2$

Bonuspunktaufgaben vom Christkind

5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0 mit $f(0) \neq 0$ und $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass $f(q) = f(1)^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. (1*)

(b) Zeige, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist. (1*)

(c) Zeige, dass $f(0) = 1$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (1*)

(d) Zeige, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = \exp(cx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (1*)

Update: Es ist hier sinnvoll, die Teilaufgaben (b) und (c) vor der Teilaufgabe (a) zu bearbeiten.

6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \to \mathbb{Q}$ stetig. Zeige, dass dann f konstant ist. (2*)

7. Sei $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. (2*)
Zeige, dass dann $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ existiert.

8. Beweisen oder widerlegen Sie (mit Gegenbeispiel) jede der folgenden Aussagen.

(a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (1*)

(b) Sei $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f gleichmäßig stetig. (1*)