Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Donnerstag, 18.01.18
Gesamtpunktzahl: 10

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 10

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Seien $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch (2)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \in (0,1], \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

und $g(x) = \sqrt{x} f(x)$. Skizziere beide Funktionen und zeige, dass g stetig ist, während f genau in 0 unstetig ist. Ist g sogar gleichmäßig stetig?

2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Definiere $f\colon [0,e] \to \mathbb{R}$ durch (2)

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 - 1) & \text{falls } x \in [0,1], \\ \ln(x^3) & \text{falls } x \in (1,e]. \end{cases}$$

Besitzt die Funktion f auf ihrem Bild $f([0,e])$ eine Umkehrfunktion? Bestimme diese gegebenenfalls.

3. Sei $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeige, dass f dann streng monoton ist. (2)

4. (a) Sei $a \in [1,2]$. Zeige, dass dann ein eindeutig bestimmtes $x \in [0, \pi/2]$ existiert mit $\sin(x) = \cos(ax)$. (1,5)

(b) Bestimme $x \in [0, \pi/2]$ mit $\sin(x) = \cos(2x)$. Welchen Wert hat dann $\sin x$? (1,5)
Hinweis: Um einen Kandidaten für x zu finden, sind Additionstheoreme und Anschauung am Einheitskreis hilfreich.

5. Sei $x \in [-1,1]$. Zeige (1)

$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Weitere Aufgaben zur Übung

6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ genau die n unterschiedlichen Lösungen $z_k := \exp(2\pi i k/n) = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n)$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ hat.
Hinweis: Es folgt aus Abbildungseigenschaften von sin und cos, dass $z_1, \dots, z_n$ paarweise verschieden sind. Dann schreibe $z^n - 1 = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$.

7. Beweise, dass $\sin x = \cos x$ für $x = \frac{\pi}{4}$. Welchen Wert hat dann $\sin x$?

8. Schreibe $z := \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ und z^3 in Polarkoordinaten.

9. Zeige $4\cos^3(z) = 3\cos(z) + \cos(3z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

10. Beweise oder widerlege folgende Aussage: Es gibt ein $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, welches weder Minimum noch Maximum annimmt.

11. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren

$$\Omega(f) := \{\omega \in \mathbb{R} : f(x+\omega) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeige: Wenn 0 ein Häufungspunkt von $\Omega(f)$ ist, so sind alle $\alpha \in \mathbb{R}$ Häufungspunkte von $\Omega(f)$.

(b) Gib ein Beispiel einer Funktion f mit $\Omega(f) = \mathbb{Q}$.

(c) Sei f stetig, 0 kein Häufungspunkt von $\Omega(f)$ und $\Omega(f) \cap (0,\infty) \neq \emptyset$. Zeige, dass dann

$$\omega_0(f) := \inf\{w \in \Omega(f) : \omega > 0\}$$

in $\Omega(f)$ enthalten ist und $\Omega(f) = \omega_0(f)\mathbb{Z} := \{\omega_0(f)k : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt.

(d) Sei $f(x) = |\sin(3x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimme dann $\omega_0(f)$ aus der vorigen Teilaufgabe (falls dieses existiert).