Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 25.01.18
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 11

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Berechne die Ableitung folgender Funktionen: (3)

(a) $f(x) = x^2(x^3+1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \sqrt{1+x^2}\exp(-x)$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$, $x > e$

(e) $f(x) = x^{\sqrt{x}\sin(x)}$, $x > 0$

(f) $f(x) = \ln(1+\cos^2(4x^3))$, $x \in \mathbb{R}$

2. Sei $f\colon [-1,4] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 7$. Bestimme das Maximum und Minimum von f. (2)

3. Für $n \in \{1,2,3\}$ definiere $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch (2)

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \le 0. \end{cases}$$

Für welche n ist f_n differenzierbar, für welche sogar stetig differenzierbar?

4. Beweise, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ folgende Identität gilt: (2)

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 7.

5. Sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$. Zeige, dass dann ein $\xi \in (a,b)$ existiert mit $f'(\xi) = 0$. (1)

Weitere Aufgaben zur Übung

6. Berechne die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = x^{3/5} - x^{-3/5}$, $x > 0 \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \arccos(x)$, $x \in [-1, 1]$

(c) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$, $x > 0$

(d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

7. Sei $I \neq \emptyset$ ein Intervall. Zudem seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige: Wenn $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in I$ gilt und ein $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = g(x_0)$ existiert, dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.

8. Zeige, dass die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sinh(x)$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion hat und berechne deren Ableitung. Beweise, dass $f^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

9. Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien Messungen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ einen unbekannten Größe $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Der mittlere Fehler ist dann als $E(x) := \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$ definiert. Welcher Wert von x würde den mittleren Fehler minimieren?

10. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0, \\ x^\alpha & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

definiert. Untersuche in Abhängigkeit von α die Differenzierbarkeit von f an der Stelle 0.

11. Sei $I \neq \emptyset$ ein beliebiges Intervall. Wir sagen, dass $f \colon I \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig ist, wenn es ein $L \geq 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in I$.

(a) Zeige, dass $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$ nicht Lipschitz stetig ist.

(b) Beweise: Wenn $f \colon I \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig ist, dann ist es insbesondere gleichmäßig stetig.

(c) Ist eine Lipschitz stetige Funktion immer differenzierbar?

(d) Sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $L > 0$ mit $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in I$. Zeige, dass dann $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in I$ gilt und f also insbesondere Lipschitz stetig ist.

(e) Gib ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche nicht Lipschitz stetig ist.