Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Donnerstag, 01.02.18
Gesamtpunktzahl: 10

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 12

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. Bestimme jeweils folgende Grenzwerte im Falle ihrer Existenz: (4)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(1+x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\Big)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha\sqrt{x}}}{x^{\beta+\frac{1}{\beta}}}$ für $\alpha, \beta > 0$

2. Sei I ein Intervall, $a \in I$ und a Häufungspunkt von I. Zudem sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $f\colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige: Wenn $w := \lim_{x\to a} f'(x)$ existiert, dann ist f an a differenzierbar und $f'(a) = w$. (2)

Gilt obiges auch ohne die Forderung, dass f stetig ist?

3. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex und $[c,d] \subset (a,b)$ mit $c < d$. Beweise, dass f auf $[c,d]$ Lipschitz stetig ist, also ein $L \geq 0$ existiert mit (2)

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

für alle $x, y \in [c,d]$. Folgere daraus, dass f stetig ist.

Hinweis: Aufgabe 7

4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme das Taylorpolynom T_n von $f(x) = \arctan(x)$ an $x_0 = 0$ und zeige mit dem Satz von Taylor, dass (2)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

gilt. Verwende dabei die Formel aus Aufgabe 8, welche natürlich als gegeben vorausgesetzt werden darf.

Wie viele Terme des vierfachen der obigen Reihe genügt es zu summieren, um π bis auf einen Fehler von höchstens 10^{-2} zu bestimmen?

Weitere Aufgaben zur Übung

5. Bestimme jeweils folgende Grenzwerte im Falle ihrer Existenz: (2)

(a) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$

(b) $\lim_{x\to 0} \Big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\Big)$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{\tan x}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \dfrac{2}{x}\Big)^x$

6. Beweise oder widerlege folgende Aussagen.

(a) Wenn $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ konvex und konkav ist, dann ist f konstant.

(b) Wenn $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ konvex ist, dann ist f Lipschitz stetig.

7. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex. Seien $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2 < b$. Beweise, dass

$$\frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} \leq \frac{f(\beta_2) - f(\beta_1)}{\beta_2 - \beta_1}.$$

8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \arctan(x)$. Zeige, dass

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\sin\big(n(\arctan(x) + \tfrac{\pi}{2})\big)(\cos\arctan x)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

9. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass es für $n \in \mathbb{N}$ immer ein Polynom p_n gibt mit $f^{(n)}(x) = e^{-1/x} p_n(\frac{1}{x})$ falls $x > 0$.

(b) Folgere, dass f beliebig oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie sehen damit die Taylorpolynome von f an $x_0 = 0$ aus?

Hinweis: Hier kann Aufgabe 2 hilfreich sein.

10. Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x)\cos(x) + x$ und $g(x) = f(x)\exp(\sin x)$. Zeige, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert, obwohl $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ (uneigentlich).

Warum widerspricht das nicht der Regel von l'Hospital (Satz 6.26)?

Bemerkung: Solche Beispiele können insbesondere auch für alle andere Fälle der Regel von l'Hospital konstruiert werden.