Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 08.02.18
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 13

Wie üblich sind die Aufgaben auf der Vorderseite schriftlich zur Korrektur abzugeben und die Aufgaben auf der Rückseite sind zusätzliche Übungsaufgaben. Die Aufgaben auf der Rückseite sind ebenfalls wichtig und eine gute Vorbereitung für die schriftlich abzugebenden Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es insbesondere im wöchentlichen MathLab.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben:

1. In dieser Aufgabe untersuchen wir die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens im Kontext von Satz 6.49 etwas genauer. Wir sehen dabei, dass für Startwerte x_0 hinreichend nahe an x_* die Konvergenzgeschwindigkeit „quadratisch“ ist; wir können mit jedem zusätzlichen Schritt eine Genauigkeit auf doppelt so viele Dezimalstellen garantieren.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_* \in \mathbb{R}$ mit $f(x_*) = 0$ und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ und definieren bei einem gegebenen $x_0 \in [a,b]$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv durch $x_n := \Phi(x_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass es ein ξ zwischen x und x_* gibt mit (1,5)

$$\Phi(x) - x_* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x)}(x - x_*)^2.$$

(b) Für $\delta > 0$ definieren wir $J_\delta := [x_* - \delta, x_* + \delta]$, $M_\delta := \max\{|f''(x)| : x \in J_\delta\}$ und $m_\delta := \min\{|f'(x)| : x \in J_\delta\}$. (1)

Sei nun $0 < \delta < \min\{1, \frac{2m_1}{M_1+1}\}$. Folgere mit dem vorigen Aufgabenteil, dass

$$|x_n - x_*| \leq \Big(\frac{M_\delta}{2m_\delta}|x_0 - x_*|\Big)^{2^n-1}|x_0 - x_*|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in J_\delta$ gilt.

(c) Zeige, dass $\delta > 0$ im vorigen Aufgabenteil so klein gewählt werden kann, dass $|x_n - x_*| \leq 10^{-2^n+1}|x_0 - x_*|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in J_\delta$ gilt. (0,5)

2. Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Berechne die Taylorreihe von f an $x_0 = 1$ und bestimme, wo diese Taylorreihe die Funktion f darstellt. (2)

3. Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und $c, d \in I$ mit $a < c < d < b$. Definiere $f\colon I \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 1$ für $x \in (c,d)$ und $f(x) = 0$ für $x \in I \setminus (c,d)$. Zeige: (2)

$$\sup\{\underline{S}(f,Z) : Z \text{ Zerlegung von } I\} = \inf\{\overline{S}(f,Z) : Z \text{ Zerlegung von } I\} = d - c.$$

Gilt das genauso auch für die Funktion $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = 1$ für $x \in [c,d]$ und $\tilde{f}(x) = 0$ für $x \in I \setminus [c,d]$?

4. Zeige oder widerlege folgende Aussagen.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion derart, dass ein $M \geq 0$ existiert mit $|f^{(n)}(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn es eine Nullfolge (x_n) mit $x_n \neq 0$ und $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, dann folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (1,5)

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ für reelle Zahlen $x_1 < x_2 < x_3$. Dann existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f''(\xi) = 0$. (1,5)

Weitere Aufgaben zur Übung

5. Entwickle $f(x) = \frac{1}{1-x}$, wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, unter Verwendung der geometrischen Reihe in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ und bestimme deren Konvergenzradius. Verifiziere, dass die Potenzreihe mit der Taylorreihe von f in $x_0 = -1$ übereinstimmt.

6. Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Konvergenz beim Newton-Verfahren i.A. wirklich nur lokal ist.

(a) Sei $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Hat f eine Nullstelle? Führe das Newton-Verfahren für f mit dem Startwert $x_0 = 0$ durch. Was passiert?

(b) Sei $f(x) = \sin(x)$. Führe das Newton-Verfahren für f mit dem Startwert $x_0 = \arctan(-2\pi)$ durch. Was passiert? Ist zu erwarten, dass sich ein geringfügig gestörter Startwert ähnlich oder komplett anders verhält?

7. Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Z_n = (0, \frac{1}{n}, \dots, 1)$ die äquidistante Zerlegung von $[0,1]$ in n-Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$. Bestimme $\overline{S}(f, Z_n)$ und $\underline{S}(f, Z_n)$.

Zeige damit, dass

$$\sup\{\underline{S}(f,Z) : Z \text{ Zerlegung von } [0,1]\} = \inf\{\overline{S}(f,Z) : Z \text{ Zerlegung von } [0,1]\} = \frac{1}{3}.$$

Hinweis: Verwende $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

8. Bestimme das Taylorpolynom T_3 und das zugehörige Lagrangesche Restglied für $f(x) = \sqrt{1+x}$ an $x_0 = 0$. Berechne damit eine Approximation a von $\sqrt{5}$ mit Fehler $|a - \sqrt{5}| < 10^{-3}$.

Hinweis: Wenn man direkt $x = 4$ einsetzt, bekommt man keine gute Abschätzung. Verwende stattdessen $x = -\frac{1}{5}$ und forme geeignet um.