Universität Ulm

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Abgabe: Mittwoch, 14.02.18
Gesamtpunktzahl: 10*

Wintersemester 2017/2018

Übungen zur Analysis 1: Blatt 14

Dies ist das letzte Übungsblatt für die Veranstaltung Analysis 1 im Wintersemester 2017/2018. Durch die schriftliche Bearbeitung der Aufgaben auf der Vorderseite können insgesamt 10 Bonuspunkte erworben werden.
Wir bitten darum, dass nur diejenigen die Aufgaben auf diesem Blatt zur Korrektur abzugeben, welche zum Zeitpunkt der Abgabe noch Übungspunkte für den Erhalt der Vorleistung brauchen. Wie über Moodle bekannt gegeben, bestätigen wir die Vorleistung ab 100 erreichten Übungspunkten. Abgabe und Besprechung ist diesmal bereits am Mittwochstermin, also am 14.02. ab 10:15 Uhr in H22.
Wie üblich sind die Aufgaben auf der Rückseite zusätzliche Übungsaufgaben. Hilfe und Tipps dazu gibt es im MathLab.

Bonuspunktaufgaben:

1. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeige, dass f dann Riemann-integrierbar ist und (3*)

$$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(b)(b-a)$$

gilt.

2. Berechne folgende Integrale (natürlich mit vollständigem Rechenweg). (4*)

(a) $\displaystyle\int_0^1 \exp(x+e^x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \exp(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_5^6 \frac{2-x}{4-x}\,\mathrm{d}x$

3. Zeige oder widerlege:

(a) Für jede Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ existiert ein $\xi \in [-1,1]$ mit (1*)

$$2f(\xi) = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Sei $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ stetig mit $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. (1*)

(c) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \leq x$ für alle $x \in [0,1]$ und $f(0) = 0$. Dann gilt $f(1) \leq \frac{1}{2}$. (1*)

Weitere Aufgaben zur Übung

4. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige: Genau dann ist f beschränkt und Riemann-integrierbar mit Integralwert w, wenn für jede Folge von Zerlegungen (Z_n) von $[a,b]$ mit $|Z_n| \to 0$ für $n \to \infty$ und Wahl von Zwischenpunkten $\xi^{(n)}$ für Z_n gilt, dass $\lim_{n\to\infty} S(f, Z_n, \xi^{(n)}) = w$.

5. Berechne folgende Integrale (natürlich mit vollständigem Rechenweg). Hier bezeichnet $\mathbb{1}_M$ für $M \subset \mathbb{R}$ die Funktion $\mathbb{1}_M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{1}_M(x) = 1$ falls $x \in M$ und $\mathbb{1}_M = 0$ sonst.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4x-1}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\,\mathrm{d}x$ für ein $n \in \mathbb{N}$

(d) $\displaystyle\int_e^{2e} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (2x+1)\sin(-3x+2)\,\mathrm{d}x$

6. Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Bestimme jeweils eine Stammfunktion von f auf den Intervallen $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ und $(1,\infty)$.

7. Zeige

$$\int \cos^k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\cos^{k-1}(x)\sin(x) + \frac{k-1}{k}\int \cos^{k-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$.

8. Beweise, dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $f(x) = -1$ für $x < 0$ Riemann-integrierbar ist, aber keine Stammfunktion besitzt.

Hinweis: Eine Aufgabe von Blatt 11 kann hier hilfreich sein.

9. Die Funktion $F(x) = x^2\sin(x^{-2})$ für $x \neq 0$ und $F(0) = 0$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und damit eine Stammfunktion von $f := F'$. Zeige, dass f auf $[0,1]$ unbeschränkt und damit nicht Riemann-integrierbar ist, obwohl $\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.