ulm university universität **uulm**

Prof. Dr. Rico Zacher
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2017/2018

Zwischenklausur zur Analysis 1

09. Dezember 2017; Bearbeitungszeit 120 Minuten; 100 Punkte insgesamt

1. Beweisen oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen. Punkte gibt es hierbei ausschließlich für die Argumentation, nicht für die bloße Angabe des Wahrheitswerts. (6×5)

(a) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$.

(b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkt mit $A \cap B \neq \emptyset$. Dann gilt $\inf A \leq \sup B$.

(c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle und konvergente Folgen mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zudem sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c \in (a_n, b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge mit genau einem Häufungspunkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Es gibt eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbarer Teilmengen von $[0,1]$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0,1]$.

(f) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Wenn $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, so ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

2. Sei $x \in (0,1)$. Beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Ungleichung (12)

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

3. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (12)

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2 - (-1)^n n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige direkt über die Definition der Folgenkonvergenz, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

4. Zeige, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ derart hat, dass (12)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$$

absolut konvergiert.

5. (a) Schreibe die komplexe Zahl (5)

$$z := \frac{1}{1 - \frac{1}{2+i}}$$

in der Form $\alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und berechne $|z|$.

(b) Skizziere die folgende Menge komplexer Zahlen (5)

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z + i - 1| \leq |z - (i-1)| \text{ und } |z| \leq \sqrt{2} \text{ und } \operatorname{Im} z \geq -1\}.$$

6. Untersuche, welche der nachfolgenden Reihen konvergieren und welche sogar absolut konvergieren. Bestimme bei (a) im Falle der Konvergenz zusätzlich den Reihenwert. (4×6)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-2)^{k+1}\frac{1}{3^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{2k-1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k (k!)^2}{(2k)!}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{k^{5/4}}$