Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 15.11.18
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 4

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Seien $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Zeige
$$\left|\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right| \geq 2.$$

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch $x_n := 2 - \frac{1}{n+2}$.

(a) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(b) Zeige direkt über Definition 2.1, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ konvergiert.

3. Beweise direkt über Definition 2.1 (also insbesondere ohne Grenzwertrechenregeln), dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch
$$a_n = \frac{n^2 - 2}{n^2 + 2n}$$
in $\mathbb{Q}$ konvergiert.

4. Zeige
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und eventuell auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

5. (a) Bestimme, für genau welche $x \in \mathbb{Q}$ folgende Ungleichung gilt: (1)

$$|x+2| > |x-3|.$$

Hinweis: Fallunterscheidungen.

(b) Zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt: (1)

$$|a| + |b| \leq |a-b| + |a+b|.$$

6. (a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ die Ungleichung (2)

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. Wann genau gilt Gleichheit in der obigen Ungleichung?

Hinweis: Induktion.

(b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichungskette (1)

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

gilt.

(c) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$. (2)

Hinweis: Verwende den vorigen Aufgabenteil!

7. Beweise direkt über Definition 2.1 (also ohne Verwendung von Grenzwertrechenregeln), dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch (3)

$$a_n = \frac{n^3 - 42n}{3n^3 + (-1)^n n - 1}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert.