Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 22.11.18
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 5

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Zeige: Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0 für $-1 < q < 1$, konvergiert gegen 1 für $q = 1$, ist bestimmt divergent gegen ∞ für $q > 1$ und ist unbestimmt divergent für $q \leq -1$.

2. Zeige: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

3. Untersuche die nachfolgend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz. Bestimme dabei gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2018} - 1$

(b) $a_n := \dfrac{3n^2 - 4n + 1}{17 - 4n^2 - 5n}$

(c) $a_n := \dfrac{2^n + 1}{3^n}$

(d) $a_n := \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

4. (a) Zeige, dass die Menge $\mathbb{N}$ kein Maximum besitzt.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $A_n := \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein Maximum (also ein größtes Element) besitzt.

(c) Zeige, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ kein Maximum besitzt.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

5. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞. Zeige: Dann gilt $x_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. (1)

Bemerkung: Ganz formal darf man hier nicht direkt von der Folge $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sprechen, falls es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n = 0$. Da nach der ersten Aussage $x_n = 0$ für höchstens endlich viele Indizes n gelten kann, kann man stattdessen zum Beispiel nur von $(\frac{1}{x_n})_{n\in I}$ mit $I := \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$ für ein ausreichend großes $N \in \mathbb{N}$ sprechen, oder $y_n := 0$ falls $x_n = 0$ und $y_n := \frac{1}{x_n}$ falls $x_n \neq 0$ definieren (für alle $n \in \mathbb{N}$) und dann $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Da für Konvergenz endlich viele Folgenglieder unerheblich sind, kann mit diesem Verständnis immer noch sinnvoll von $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ sprechen.

6. Untersuche die nachfolgend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmte Divergenz. Bestimme dabei gegebenenfalls den Grenzwert oder die Form der bestimmten Divergenz (gegen ∞ oder gegen $-\infty$).

(a) $a_n := \dfrac{n^3}{n^2+3} - \dfrac{2n^2}{2n+1}$ (1)

(b) $a_n := n + (-1)^n n$ (1)

(c) $a_n := \dfrac{n}{4^n}$ (1)

(d) $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (1)

7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeige: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann gilt (2)

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Gib ein Beispiel einer divergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, dass $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

8. Beweise oder widerlege mit einem Gegenbeispiel jede der folgenden Aussagen.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Dann divergiert auch die Folge $(a_n^2 + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (1)

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch (1)

$$b_n := \begin{cases} n(-1)^n & \text{falls } n \leq 2018, \\ a_{n-2018} & \text{falls } n > 2018. \end{cases}$$

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. (1)