Prof. Dr. Emil Wiedemann
Dr. Manfred Sauter

Wintersemester 2018/2019

Übungen zur Analysis 1: Blatt 7

Vorbereitende und zusätzliche Aufgaben zur Übung

1. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{2}\Big((-1)^n + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\Big).$$

(a) Betrachte die Teilfolgen $(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{4k-3})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{4k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ um zu zeigen, dass $-1, 0, 1$ Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind.

(b) Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau die Häufungspunkte $\{-1, 0, 1\}$ hat.

Bestimme damit $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Bemerkung: Diese Aufgabe verdankt Ihr einem Kommilitonen, der sich für ein Beispiel einer „ohne Fallunterscheidung explizit gegebenen“ Folge mit mehr als zwei Häufungspunkten interessiert hat.

Hinweis: $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$. Gibt es bei der Folge $(\frac{n(n+1)}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Muster dafür, welche Folgenglieder gerade oder ungerade sind?

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Untersuche die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie. Beweise damit, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und bestimme diesen.

3. Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt und nichtleer. Zeige, dass dann eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus A existiert mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A.$$

Formuliere eine Verallgemeinerung dieses Resultats, die auch den Fall einschließt, wenn A unbeschränkt ist.

Schriftlich abzugebende Übungsaufgaben

Bei den Aufgaben wird immer auch eine Begründung durch ein schlüssiges und vollständiges Argument erwartet, sofern darauf nicht explizit verzichtet wird. In Ihrer Argumentation dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung und vorigen Übungsaufgaben verwenden, sollten aber immer einen genauen Verweis geben und in der Regel auch begründen, weshalb das Resultat anwendbar ist.
Die geklammerte Zahl auf dem Seitenrand gibt an, wieviele Übungspunkte auf die jeweilige Aufgabe oder den jeweiligen Aufgabenteil vergeben werden.

4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch (2)

$$a_n := 4 + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Bestimme (mit Beweis) die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch (2)

$$b_n := \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \frac{n}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Beweise, dass 2 kein Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

6. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeige, dass (2)

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_k : k \geq n\}\right).$$

Hinweis: Betrachte $A_n := \{a_k : k \geq n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In welcher Beziehung stehen A_{n+1} und A_n? Was bedeutet das dann für $\sup A_{n+1}$ und $\sup A_n$?

7. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien durch

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

definiert.

(a) Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. (2)

Hinweis: Bernoulli-Ungleichung geschickt anwenden.

(b) Zeige damit, dass die Intervalle $I_n := [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Intervallschachtelung im Sinne von Satz 2.25 darstellen. (1)

(c) Folgere mit den vorigen Aufgabenteilen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ und dass der gemeinsame Grenzwert e die Abschätzungen $\frac{9}{4} \leq e \leq \frac{27}{8}$ erfüllt. (1)