Kollektives Verhalten von Schwärmen

Langer Abend der Wissenschaften 2025

André Schlichting

Institut für Angewandte Analysis

23. Mai 2025

Von der Frage

Wer hat schon mal einen Vogelschwarm gesehen, wie er sich am Himmel dreht und windet?

Von der Frage zur

Wer hat schon mal einen Vogelschwarm gesehen, wie er sich am Himmel dreht und windet?

Und wer glaubt, dass da einer den Chef spielt und sagt: „Leute, jetzt rechts abbiegen“?

Von der Frage zur These

Wer hat schon mal einen Vogelschwarm gesehen, wie er sich am Himmel dreht und windet?

Und wer glaubt, dass da einer den Chef spielt und sagt: „Leute, jetzt rechts abbiegen"?

These:

Was aussieht wie Chaos, folgt oft Regeln. . .

Von der Frage zur These

Wer hat schon mal einen Vogelschwarm gesehen, wie er sich am Himmel dreht und windet?

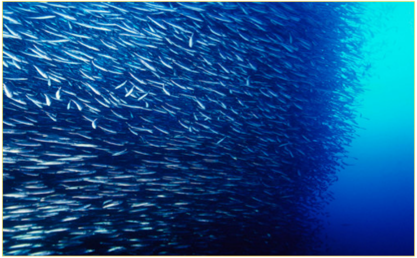
Und wer glaubt, dass da einer den Chef spielt und sagt: „Leute, jetzt rechts abbiegen“?

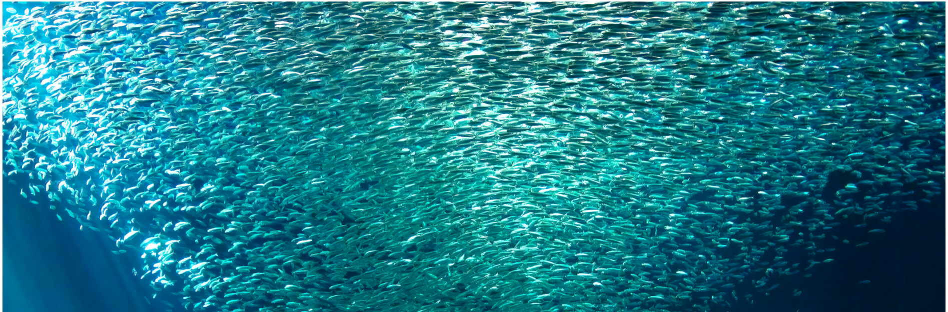
These:

Was aussieht wie Chaos, folgt oft Regeln…

…und genau da beginnt Mathematik.

Kollektives Verhalten von Fischen





Beobachtungen an einem Vogelschwarm

Fragestellung: Schwarmbildung

Wie verständigen sich die Tiere?

Warum fliegen sie nicht einfach ineinander?

BBC Earth: *Ten Million Starlings Swarm* `youtu.be/UVko9jyAkQg`

Beobachtungen

Fragestellung: Schwarmbildung

Wie verständigen sich die Tiere?

Warum fliegen sie nicht einfach ineinander?

Beobachtungen

Fragestellung: Schwarmbildung

Wie verständigen sich die Tiere?
Warum fliegen sie nicht einfach ineinander?

Beobachtungsthese:

Jedes Tier entscheidet lokal,
aber das Gesamtergebnis wirkt global koordiniert.

Beobachtungen

Fragestellung: Schwarmbildung

Wie verständigen sich die Tiere?
Warum fliegen sie nicht einfach ineinander?

Beobachtungsthese:

Jedes Tier entscheidet lokal,
aber das Gesamtergebnis wirkt global koordiniert.

Rolle der angewandten Mathematik:

Unsere Aufgabe in der angewandten Mathematik ist es, aus diesem komplexen Verhalten ein Modell zu bauen, dieses zu analysieren und mit den Beobachtungen zu vergleichen.

Mathematische Herangehensweise

universität ulm

Typische Arbeitsschritte innerhalb der *angewandten Mathematik*:

1. Abstraktion und Modellbildung
2. Numerische Tests und Experimente (optional)
3. Untersuchung des Modells mittels analytischer Methoden

Mathematische Herangehensweise

Typische Arbeitsschritte innerhalb der *angewandten Mathematik*:

1. Abstraktion und Modellbildung

   Frage: Welches Phänomen soll abgebildet oder untersucht werden?

2. Numerische Tests und Experimente (optional)

3. Untersuchung des Modells mittels analytischer Methoden

Mathematische Herangehensweise

Typische Arbeitsschritte innerhalb der *angewandten Mathematik*:

1. Abstraktion und Modellbildung

   Frage: Welches Phänomen soll abgebildet oder untersucht werden?

   Aufgabe: Finde ein möglichst einfaches, aber nicht zu einfaches Modell.

2. Numerische Tests und Experimente (optional)

3. Untersuchung des Modells mittels analytischer Methoden

Mathematische Herangehensweise

Typische Arbeitsschritte innerhalb der *angewandten Mathematik*:

1. Abstraktion und Modellbildung
   Frage: Welches Phänomen soll abgebildet oder untersucht werden?
   Aufgabe: Finde ein möglichst einfaches, aber nicht zu einfaches Modell.
2. Numerische Tests und Experimente (optional)
   Frage: Bildet das vorgeschlagene Modell das beobachtete Phänomen ab?
3. Untersuchung des Modells mittels analytischer Methoden

Mathematische Herangehensweise

Typische Arbeitsschritte innerhalb der *angewandten Mathematik*:

1. Abstraktion und Modellbildung

   Frage: Welches Phänomen soll abgebildet oder untersucht werden?

   Aufgabe: Finde ein möglichst einfaches, aber nicht zu einfaches Modell.

2. Numerische Tests und Experimente (optional)

   Frage: Bildet das vorgeschlagene Modell das beobachtete Phänomen ab?

   Aufgabe: Implementation und numerische Untersuchung

3. Untersuchung des Modells mittels analytischer Methoden

Mathematische Herangehensweise

Typische Arbeitsschritte innerhalb der *angewandten Mathematik*:

1. Abstraktion und Modellbildung

   Frage: Welches Phänomen soll abgebildet oder untersucht werden?

   Aufgabe: Finde ein möglichst einfaches, aber nicht zu einfaches Modell.

2. Numerische Tests und Experimente (optional)

   Frage: Bildet das vorgeschlagene Modell das beobachtete Phänomen ab?

   Aufgabe: Implementation und numerische Untersuchung

3. Untersuchung des Modells mittels analytischer Methoden

   Frage: Wann und wie tritt das Phänomen im Model auf?

Mathematische Herangehensweise

Typische Arbeitsschritte innerhalb der *angewandten Mathematik*:

1. Abstraktion und Modellbildung

   Frage: Welches Phänomen soll abgebildet oder untersucht werden?

   Aufgabe: Finde ein möglichst einfaches, aber nicht zu einfaches Modell.

2. Numerische Tests und Experimente (optional)

   Frage: Bildet das vorgeschlagene Modell das beobachtete Phänomen ab?

   Aufgabe: Implementation und numerische Untersuchung

3. Untersuchung des Modells mittels analytischer Methoden

   Frage: Wann und wie tritt das Phänomen im Model auf?

   Aufgabe: Verstehe den Mechanismus so gut um daraus einen Beweis zu machen.

Mathematische Herangehensweise

Typische Arbeitsschritte innerhalb der *angewandten Mathematik*:

1. Abstraktion und Modellbildung

   Frage: Welches Phänomen soll abgebildet oder untersucht werden?

   Aufgabe: Finde ein möglichst einfaches, aber nicht zu einfaches Modell.

2. Numerische Tests und Experimente (optional)

   Frage: Bildet das vorgeschlagene Modell das beobachtete Phänomen ab?

   Aufgabe: Implementation und numerische Untersuchung

3. Untersuchung des Modells mittels analytischer Methoden

   Frage: Wann und wie tritt das Phänomen im Model auf?

   Aufgabe: Verstehe den Mechanismus so gut um daraus einen Beweis zu machen.

Ziel heute: *Mechanismums* und *Zutaten* der Schwarmbildung verstehen.

Abstraktion und Modellbildung

Interaktion: Beobachtungen liefern 3 Mechanismen, welche jeder Agent $i = 1, \ldots, N$ befolgt:

Abstraktion:
Agentenbasierte Modellbildung
Numerierung: $i = 1, 2, \ldots, N$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v_1^i, v_2^i)$

Abstraktion und Modellbildung

Interaktion: Beobachtungen liefern 3 Mechanismen, welche jeder Agent $i = 1, \ldots, N$ befolgt:

1. Kohärenz/Zusammenhalt

Jeder Agent will in die Nähe seiner benachbarten Agenten

Abstraktion:
Agentenbasierte Modellbildung
Numerierung: $i = 1, 2, \ldots, N$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v_1^i, v_2^i)$

Abstraktion und Modellbildung

Interaktion: Beobachtungen liefern 3 Mechanismen, welche jeder Agent $i = 1, \ldots, N$ befolgt:

1. Kohärenz/Zusammenhalt

Jeder Agent will in die Nähe seiner benachbarten Agenten

Folge den mittleren Abstand deiner Nachbarn:

Nachbarschaft des i-ten Agent:

$$N^i = \{j \neq i : \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\| \leq R_{\text{Sicht}}\}$$

Anzahl der Nachbarn $\sharp N^i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

Abstraktion:

Agentenbasierte Modellbildung

Numerierung: $i = 1, 2, \ldots, N$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v_1^i, v_2^i)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$

Abstraktion und Modellbildung

Interaktion: Beobachtungen liefern 3 Mechanismen, welche jeder Agent $i = 1, \dots, N$ befolgt:

1. Kohärenz/Zusammenhalt

Jeder Agent will in die Nähe seiner benachbarten Agenten

Folge den mittleren Abstand deiner Nachbarn:

Nachbarschaft des i-ten Agent:

$$N^i = \{j \neq i : \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\| \leq R_{\text{Sicht}}\}$$

Anzahl der Nachbarn $\sharp N^i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

Orientierung am mittleren Abstand, falls $\sharp N^i \geq 1$:

$$\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}} = \frac{1}{\sharp N^i} \sum_{j \in N^i} (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)$$

Abstraktion:

Agentenbasierte Modellbildung

Numerierung: $i = 1, 2, \dots, N$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x^i_1, x^i_2)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v^i_1, v^i_2)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$

Modellbildung: Separation und Ausrichtung

2. Separation/Komfortzone

Agenten gehen Nachbarn in der Komfortzone aus dem Weg

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v_1^i, v_2^i)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$

Modellbildung: Separation und Ausrichtung

2. Separation/Komfortzone

Agenten gehen Nachbarn in der Komfortzone aus dem Weg

Komfortzone des i-ten Agent:
$M^i = \{j \neq i : \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\| \leq R_{\text{Komfort}}\}$
Anzahl der Agenten in Komfortzone $\sharp M^i \in \{0, 1, \ldots, N^i\}$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v_1^i, v_2^i)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$
- Komfortradius
  $0 < R_{\text{Komfort}} < R_{\text{Sicht}}$

Modellbildung: Separation und Ausrichtung

2. Separation/Komfortzone

Agenten gehen Nachbarn in der Komfortzone aus dem Weg

Komfortzone des i-ten Agent:
$M^i = \{j \neq i : \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\| \leq R_{\text{Komfort}}\}$
Anzahl der Agenten in Komfortzone $\sharp M^i \in \{0, 1, \ldots, N^i\}$

Orientierung entgegen des mittleren Abstands, falls $\sharp M^i \geq 1$:

$$\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}} = -\frac{1}{\sharp M^i} \sum_{j \in M^i} (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)$$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x^i_1, x^i_2)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v^i_1, v^i_2)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$
- Komfortradius
  $0 < R_{\text{Komfort}} < R_{\text{Sicht}}$

Modellbildung: Separation und Ausrichtung

2. Separation/Komfortzone

Agenten gehen Nachbarn in der Komfortzone aus dem Weg

Komfortzone des i-ten Agent:
$M^i = \{j \neq i : \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\| \leq R_{\text{Komfort}}\}$
Anzahl der Agenten in Komfortzone $\sharp M^i \in \{0, 1, \ldots, N^i\}$

Orientierung entgegen des mittleren Abstands, falls $\sharp M^i \geq 1$:

$$\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}} = -\frac{1}{\sharp M^i} \sum_{j \in M^i} (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)$$

3. Anpassung/Ausrichtung

Agenten richten sich an Nachbarn aus

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x^i_1, x^i_2)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v^i_1, v^i_2)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$
- Komfortradius
  $0 < R_{\text{Komfort}} < R_{\text{Sicht}}$

Modellbildung: Separation und Ausrichtung

2. Separation/Komfortzone

Agenten gehen Nachbarn in der Komfortzone aus dem Weg

Komfortzone des i-ten Agent:
$M^i = \{j \neq i : \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\| \leq R_{\text{Komfort}}\}$
Anzahl der Agenten in Komfortzone $\sharp M^i \in \{0, 1, \ldots, N^i\}$

Orientierung entgegen des mittleren Abstands, falls $\sharp M^i \geq 1$:

$$\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}} = -\frac{1}{\sharp M^i} \sum_{j \in M^i} (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)$$

3. Anpassung/Ausrichtung

Agenten richten sich an Nachbarn aus

Orientierung folgt Orientierung der Nachbarn, falls $\sharp N^i \geq 1$:

$$\mathbf{v}^i_{\text{Anpassung}} = \frac{1}{\sharp N^i} \sum_{j \in N^i} \mathbf{v}^j$$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x^i_1, x^i_2)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v^i_1, v^i_2)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$
- Komfortradius
  $0 < R_{\text{Komfort}} < R_{\text{Sicht}}$

Agentenschwarm (zeitdiskret)

Initialisierung: Gegeben die Position/Orientierung der Agenten zum Zeitpunkt $t = 0 : \{ (\mathbf{x}^i(t), \mathbf{v}^i(t)) : i = 1, \dots, N \}$.

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v_1^i, v_2^i)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$
- Komfortradius $0 < R_{\text{Komfort}} < R_{\text{Sicht}}$

Agentenschwarm (zeitdiskret)

Initialisierung: Gegeben die Position/Orientierung der Agenten zum Zeitpunkt $t = 0 : \big\{ \big(\mathbf{x}^i(t), \mathbf{v}^i(t) \big) : i = 1, \ldots, N \big\}$.

Orientierung zum Zeitpunkt $t+1$ des i-ten Agenten ist

$$\mathbf{v}^i(t+1) = \alpha \mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) + \beta \mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1) + \gamma \mathbf{v}^i_{\text{Anpassung}}(t+1)$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) = \frac{1}{\sharp N^i} \sum\nolimits_{j \in N^i} (\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1) = -\frac{1}{\sharp M^i} \sum\nolimits_{j \in M^i} (\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Anpassung}}(t+1) = \frac{1}{\sharp N^i} \sum\nolimits_{j \in N^i} \mathbf{v}^j(t)$$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x^i_1, x^i_2)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v^i_1, v^i_2)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$
- Komfortradius $0 < R_{\text{Komfort}} < R_{\text{Sicht}}$
- Kohärenzfaktor $\alpha > 0$
- Komfortfaktor $\beta > 0$
- Anpassungsfaktor $\gamma > 0$

Agentenschwarm (zeitdiskret)

Initialisierung: Gegeben die Position/Orientierung der Agenten zum Zeitpunkt $t = 0 : \{(\mathbf{x}^i(t), \mathbf{v}^i(t)) : i = 1, \ldots, N\}$.

Orientierung zum Zeitpunkt $t + 1$ des i-ten Agenten ist

$$\mathbf{v}^i(t+1) = \alpha \mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) + \beta \mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1) + \gamma \mathbf{v}^i_{\text{Anpassung}}(t+1)$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) = \frac{1}{\sharp N^i} \sum_{j \in N^i} (\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1) = -\frac{1}{\sharp M^i} \sum_{j \in M^i} (\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Anpassung}}(t+1) = \frac{1}{\sharp N^i} \sum_{j \in N^i} \mathbf{v}^j(t)$$

Agentenschritt: Für jedes $i = 1, \ldots, N$ führe update durch

$$\mathbf{x}^i(t+1) = \mathbf{x}^i(t) + h\mathbf{v}^i(t+1).$$

Eigenschaften des i-ten Agents:

- Position $\mathbf{x}^i = (x^i_1, x^i_2)$
- Orientierung $\mathbf{v}^i = (v^i_1, v^i_2)$
- Sichtradius $0 < R_{\text{Sicht}}$
- Komfortradius $0 < R_{\text{Komfort}} < R_{\text{Sicht}}$
- Kohärenzfaktor $\alpha > 0$
- Komfortfaktor $\beta > 0$
- Anpassungsfaktor $\gamma > 0$
- Schrittweite $h > 0$

Implementation des Agentenmodells

Einstieg in wissenschaftliche Programmierung wird immer leichter:

Implementation des Agentenmodells

Einstieg in wissenschaftliche Programmierung wird immer leichter:

1953 `Fortran` (erste wissenschaftliche Hochsprache)

Implementation des Agentenmodells

Einstieg in wissenschaftliche Programmierung wird immer leichter:

1953 `Fortran` (erste wissenschaftliche Hochsprache)

1972 `C` (performant, nicht einsteigerfreundlich)

Implementation des Agentenmodells

Einstieg in wissenschaftliche Programmierung wird immer leichter:

1953 `Fortran` (erste wissenschaftliche Hochsprache)

1972 `C` (performant, nicht einsteigerfreundlich)

1991 `Python` (interpretiert, einsteigerfreundlich, kann schnell sein)

Implementation des Agentenmodells

Einstieg in wissenschaftliche Programmierung wird immer leichter:

1953 `Fortran` (erste wissenschaftliche Hochsprache)

1972 `C` (performant, nicht einsteigerfreundlich)

1991 `Python` (interpretiert, einsteigerfreundlich, kann schnell sein)

2012 `Julia` (interpretiert, einsteigerfreundlich, performant)

Implementation des Agentenmodells

Einstieg in wissenschaftliche Programmierung wird immer leichter:

1953 `Fortran` (erste wissenschaftliche Hochsprache)

1972 `C` (performant, nicht einsteigerfreundlich)

1991 `Python` (interpretiert, einsteigerfreundlich, kann schnell sein)

2012 `Julia` (interpretiert, einsteigerfreundlich, performant)

2019 `Agents.jl` (agentenbasierte Modellierung in Julia)

Analytische Untersuchung

universität ulm

Analysis: *Mathematik der Grenzwertbildung*

Analytische Untersuchung

Analysis: *Mathematik der Grenzwertbildung*

Mathematik der Grenzübergänge: Infinitesimalrechnung (Differentialrechnung, Integralrechnung)

Analytische Untersuchung

Analysis: *Mathematik der Grenzwertbildung*

Mathematik der Grenzübergänge: Infinitesimalrechnung (Differentialrechnung, Integralrechnung)

Ziel: Modell soll zugänglich für die mathematische Untersuchung werden

Analytische Untersuchung

Analysis: *Mathematik der Grenzwertbildung*

Mathematik der Grenzübergänge: Infinitesimalrechnung (Differentialrechnung, Integralrechnung)

Ziel: Modell soll zugänglich für die mathematische Untersuchung werden

Mögliche Grenzübergänge im Agentenmodell: $\gamma = 0$ (keine Anpassung)

$$\mathbf{x}^i(t+1) = \mathbf{x}^i(t) + h\mathbf{v}^i(t+1)$$
$$\mathbf{v}^i(t+1) = \alpha\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) + \beta\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1)$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) = \frac{1}{\sharp N^i}\sum_{j\in N^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$
$$\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1) = -\frac{1}{\sharp M^i}\sum_{j\in M^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

Analytische Untersuchung

Analysis: *Mathematik der Grenzwertbildung*

Mathematik der Grenzübergänge: Infinitesimalrechnung (Differentialrechnung, Integralrechnung)

Ziel: Modell soll zugänglich für die mathematische Untersuchung werden

Mögliche Grenzübergänge im Agentenmodell: $\gamma = 0$ (keine Anpassung)

$$\mathbf{x}^i(t+1) = \mathbf{x}^i(t) + h\mathbf{v}^i(t+1)$$
$$\mathbf{v}^i(t+1) = \alpha\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) + \beta\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1)$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) = \frac{1}{\sharp N^i}\sum_{j\in N^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$
$$\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1) = -\frac{1}{\sharp M^i}\sum_{j\in M^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

Umschreiben!

$$\frac{\mathbf{x}^i(t+1) - \mathbf{x}^i(t)}{h} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] = \alpha\frac{1}{\sharp N^i}\sum_{j\in N^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t)) - \beta\frac{1}{\sharp M^i}\sum_{j\in M^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

Analytische Untersuchung

Analysis: *Mathematik der Grenzwertbildung*

Mathematik der Grenzübergänge: Infinitesimalrechnung (Differentialrechnung, Integralrechnung)

Ziel: Modell soll zugänglich für die mathematische Untersuchung werden

Mögliche Grenzübergänge im Agentenmodell: $\gamma = 0$ (keine Anpassung)

$$\mathbf{x}^i(t+1) = \mathbf{x}^i(t) + h\mathbf{v}^i(t+1)$$

$$\mathbf{v}^i(t+1) = \alpha\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) + \beta\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1)$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Kohärenz}}(t+1) = \frac{1}{\sharp N^i}\sum\nolimits_{j\in N^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

$$\mathbf{v}^i_{\text{Komfort}}(t+1) = -\frac{1}{\sharp M^i}\sum\nolimits_{j\in M^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

Umschreiben!

$$\frac{\mathbf{x}^i(t+1) - \mathbf{x}^i(t)}{h} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] = \alpha\frac{1}{\sharp N^i}\sum\nolimits_{j\in N^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t)) - \beta\frac{1}{\sharp M^i}\sum\nolimits_{j\in M^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

Grenzübergang $h \to 0$ führt auf System gekoppelter Differentialgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] = \alpha\frac{1}{\sharp N^i}\sum\nolimits_{j\in N^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t)) - \beta\frac{1}{\sharp M^i}\sum\nolimits_{j\in M^i}(\mathbf{x}^j(t) - \mathbf{x}^i(t))$$

Analytische Methoden

Gewöhnliche Differentialgleichung $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] \qquad \text{für } i = 1, \ldots, N\,.$$

Die Untersuchung von Lösungen zu Differentialgleichungen (DGL) ist ein Kernthema der *Analysis*.

Analytische Methoden

Gewöhnliche Differentialgleichung $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] \qquad \text{für } i = 1, \ldots, N\,.$$

Die Untersuchung von Lösungen zu Differentialgleichungen (DGL) ist ein Kernthema der *Analysis*. Das beschreiben des qualitatischen Verhaltens ist der Inhalt der *Dynamischen Systeme*.

Analytische Methoden

Gewöhnliche Differentialgleichung $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] \qquad \text{für } i = 1, \ldots, N\,.$$

Die Untersuchung von Lösungen zu Differentialgleichungen (DGL) ist ein Kernthema der *Analysis*. Das beschreiben des qualitatischen Verhaltens ist der Inhalt der *Dynamischen Systeme*.

Frage an das Modell	**Mathematische Methode**
Wann bleibt der Schwarm zusammen?	

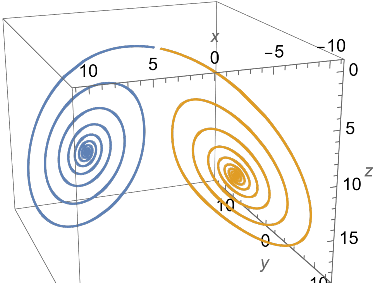
Analytische Methoden

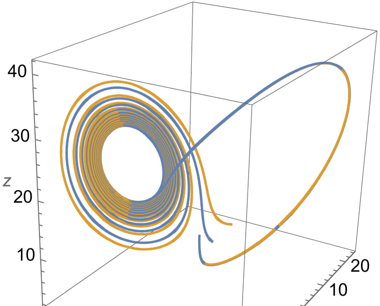
Gewöhnliche Differentialgleichung $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] \qquad \text{für } i = 1, \ldots, N\,.$$

Die Untersuchung von Lösungen zu Differentialgleichungen (DGL) ist ein Kernthema der *Analysis*. Das beschreiben des qualitatischen Verhaltens ist der Inhalt der *Dynamischen Systeme*.

Frage an das Modell	Mathematische Methode
■ *Wann bleibt der Schwarm zusammen?*	■ Stabilität der DGL

Wie verhalten sich kleine Störungen in den Anfangsposition und -geschwindigkeiten? Werden diese in der Zeit größer oder kleiner?





Analytische Methoden

Gewöhnliche Differentialgleichung $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] \qquad \text{für } i = 1, \ldots, N\,.$$

Die Untersuchung von Lösungen zu Differentialgleichungen (DGL) ist ein Kernthema der *Analysis*. Das beschreiben des qualitatischen Verhaltens ist der Inhalt der *Dynamischen Systeme*.

Frage an das Modell

- *Wann bleibt der Schwarm zusammen?*
- *Wann bilden sich Untergruppen?*

Mathematische Methode

- Stabilität der DGL

Analytische Methoden

Gewöhnliche Differentialgleichung $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] \qquad \text{für } i = 1, \dots, N\,.$$

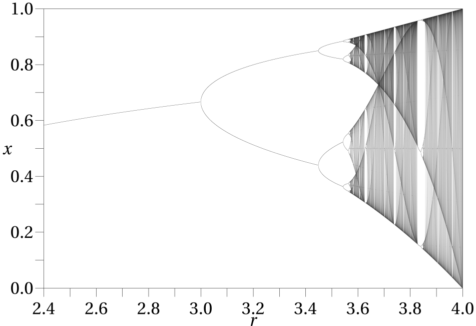
Die Untersuchung von Lösungen zu Differentialgleichungen (DGL) ist ein Kernthema der *Analysis*. Das beschreiben des qualitatischen Verhaltens ist der Inhalt der *Dynamischen Systeme*.

Frage an das Modell

- *Wann bleibt der Schwarm zusammen?*
- *Wann bilden sich Untergruppen?*

Mathematische Methode

- Stabilität der DGL
- Bifurkation und Attraktoren



Analytische Methoden

Gewöhnliche Differentialgleichung $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] \qquad \text{für } i = 1, \ldots, N\,.$$

Die Untersuchung von Lösungen zu Differentialgleichungen (DGL) ist ein Kernthema der *Analysis*. Das beschreiben des qualitatischen Verhaltens ist der Inhalt der *Dynamischen Systeme*.

Frage an das Modell

- *Wann bleibt der Schwarm zusammen?*
- *Wann bilden sich Untergruppen?*
- *Gibt es Gleichgewichte?*

Mathematische Methode

- Stabilität der DGL
- Bifurkation und Attraktoren

Analytische Methoden

Gewöhnliche Differentialgleichung $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}^i[\mathbf{x}^i(t)] \qquad \text{für } i = 1, \ldots, N\,.$$

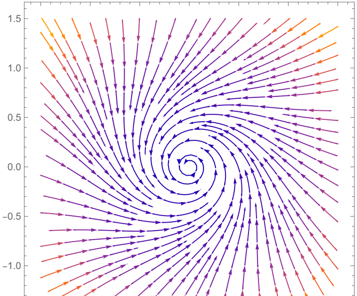
Die Untersuchung von Lösungen zu Differentialgleichungen (DGL) ist ein Kernthema der *Analysis*.
Das beschreiben des qualitatischen Verhaltens ist der Inhalt der *Dynamischen Systeme*.

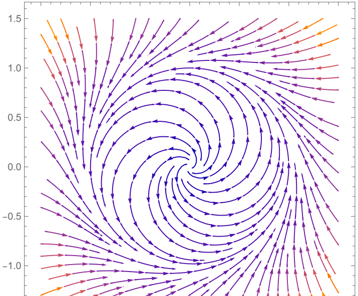
Frage an das Modell

- *Wann bleibt der Schwarm zusammen?*
- *Wann bilden sich Untergruppen?*
- *Gibt es Gleichgewichte?*

Mathematische Methode

- Stabilität der DGL
- Bifurkation und Attraktoren
- Langzeitverhalten und Phasenübergänge





Ausblick auf aktuelle Forschungsfragen

Untersuchung vieler Agenten mit stochastischen Einfluss: *Overdamped Langevin equation*

$$\mathrm{d}X_t^i = -\frac{\kappa}{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \nabla W(X^i - X^j)dt + \sqrt{2}\,\mathrm{d}B_t^i \qquad , i = 1, \ldots, N$$

Grenzübergang unendlich viele Agenten $N \to \infty$ **:** führt auf partielle Differentialgleichung

$$\partial_t \varrho = \Delta \varrho + \kappa \nabla \cdot (\varrho \nabla W \star \varrho) \qquad \text{in } \mathbb{T}_L^d \times (0, T]$$

- Gleichung für die Dichte des Schwarms (keine Individuen mehr)
- Schwarmbildung (Phasenübergang) ist in diesem Model beweisbar
- Parameterbereiche für Schwarmbildung sind bestimmbar

Ausblick auf aktuelle Forschungsfragen

Untersuchung vieler Agenten mit stochastischen Einfluss: *Overdamped Langevin equation*

$$\mathrm{d}X_t^i = -\frac{\kappa}{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \nabla W(X^i - X^j)dt + \sqrt{2}\,\mathrm{d}B_t^i \qquad , i = 1, \dots, N$$

Grenzübergang unendlich viele Agenten $N \to \infty$: führt auf partielle Differentialgleichung

$$\partial_t \varrho = \Delta \varrho + \kappa \nabla \cdot (\varrho \nabla W \star \varrho) \qquad \text{in } \mathbb{T}_L^d \times (0, T]$$

- Gleichung für die Dichte des Schwarms (keine Individuen mehr)
- Schwarmbildung (Phasenübergang) ist in diesem Model beweisbar
- Parameterbereiche für Schwarmbildung sind bestimmbar

Universelles Phänomen: Sehr ähnliche Gleichung tauchen in vielen Bereichen auf:

- Molekulardynamik (Lennard–Jones, Van-der-Waals)
- Meinungsbildung/Echochambers aus den Sozialwissenschaften (Hegselmann–Krause)
- Flüssigkristalle und Nanotubes (Anisotropie, Onsager, Maier–Saupe)
- Synchronization von Oszillatoren (Kuramoto)
- Chemotaxis/Bewegung von Einzelern (Patlak–Keller–Segel)
- Training von Transformer-Netzwerken (Large-Language-Models/ChatGPT)

Mathematik ist kein Zahlensalat – sie ist die Sprache hinter dem Verhalten der Welt.

Mathematik ist kein Zahlensalat – sie ist die Sprache hinter dem Verhalten der Welt.

Und wenn Sie das nächste Mal einem Vogelschwarm zuschauen, dann denken Sie nicht nur: „Wie schön”

Mathematik ist kein Zahlensalat – sie ist die Sprache hinter dem Verhalten der Welt.

Und wenn Sie das nächste Mal einem Vogelschwarm zuschauen, dann denken Sie nicht nur: „Wie schön" — sondern auch: „Wie schön mathematisch!"

`https://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/`