

Seminar: metrische Maßräume und optimaler Transport

Adrian Spener

23. Januar 2018

Zusammenfassung

Im Sommersemester 2018 bietet Prof. Dr. Rico Zacher zusammen mit Dr. Adrian Spener ein Seminar zum Thema metrische Maßräume und optimaler Transport an.

1 Vortragsthemen

Das Seminar gibt einen Einblick in das junge Forschungsthema metrische Maßräume und optimaler Transport. Wir werden klassische Ergebnisse der Analysis (etwa Krümmungsschranken und Dimension, welche zum Beispiel Sobolevungleichungen implizieren) auf nicht-kontinuierliche metrische Räume verallgemeinern, welche lediglich mit einem Borelmaß ausgestattet sind. Dazu müssen wir zunächst das Vorgehen im \mathbb{R}^n (mit einer Dichte ausgestattet) oder auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten verstehen. Danach betrachten wir die Theorie des optimalen Transports, deren Methoden wir verwenden, um die klassische Theorie auf metrische Maßräume zu verallgemeinern.

Das Ganze geschieht im Zusammenspiel von Analysis (PDEs, Evolutionsgleichungen, Funktionalungleichungen, Variationsrechnung, Maßtheorie, dynamische Systeme, Optimierung...), Geometrie (Mannigfaltigkeiten, Krümmungsschranken, metrische Räume, Graphen,...) und Stochastik (Diffusionsprozesse, Markovprozesse, optimaler Transport und Transportungleichungen,...). Hierbei diskutieren wir auch aktuelle Forschungsarbeiten.

Zu jedem der drei Teilgebiete sollen ein bis zwei einführende Vorträge gehalten werden, dazu sind als Quelle vor allem die Lehrbücher und Skripte [Vil09], [Ket14], [AG13] und [BGL14] geeignet. Anschließend können Vorträge zu spezielleren Themen gehalten werden, je nach Interesse und Vorkenntnissen der Teilnehmer. Einen Überblick über die tiefgehenden Themen, die angeschnitten werden können, bietet der Übersichtsartikel [AGS17].

1.1 Diffusionshalbgruppen und Γ -Kalkül auf gewichteten Riemannschen Mannigfaltigkeiten (1-3 Vorträge)

- * klassische Bakry–Émery Bedingung und dessen Konsequenzen und Äquivalenzen: Gradientenabschätzung für Markov-Diffusionshalbgruppen [BE85],

[Wan11], Ungleichungen von Brunn–Minkowski und Prékopa–Leindler [CEMS01], [BGL14].

Erste Quelle: [AGS17, Sect. 1, Sect. 2]

Geeignet für Studierende mit Interesse und Erfahrung in PDE, Riemannscher Geometrie.

1.2 Optimaler Transport (3-7 Vorträge)

- ★ Einführung: Wasserstein-Distanz und optimaler Transport [Ket14], [Vil09], [AGS17, Sect. 3], [Vil03], [DNS09]
- ★ Kantorovich-Dualität [Ket14, Vil09], dynamische Formulierung von Benamou–Brenier [BB00],[Vil03] und Hamilton–Jacobi Gleichung und die erneute Betrachtung der BE-Bedingung und der Prékopa–Leindler-Ungleichung ([AGS17, Sect. 4] und die dortigen Referenzen)
- ★ JKO: Fokker–Planck-Gleichung als Gradientenfluss bezüglich der Wasserstein-Distanz [AGS17, Sect. 4], [JKO98],[Vil09].

Besonders geeignet für Studierende mit Interesse und Erfahrung in Variationsrechnung und/oder Stochastik

1.3 metrische Maßräume (3-7 Vorträge)

- ★ Einführung, $CD(\kappa, \infty)$, Gromov-Konvergenz [Stu06], [Vil09, Sect. 26ff], [Ket14], [AGS17, Sect. 5], [LV09]
- ★ Konsequenzen von $CD(\kappa, \infty)$ ([AGS17, Sect. 7]): Bishop–Gromov [Vil09, p. 864ff], Bonnet–Myers, Ungleichungen: Poincaré, Log-Sobolev und Talagrand, Scharfe Sobolev-Ungleichung, Levy–Gromov.[BGL14]
- ★ RCD & Konsequenzen, Cheeger-Energie und L^2 -Gradientenfluss, Li–Yau & Harnack, max. diameter, splitting...([AGS17, Sect. 6+7] und die dortigen Referenzen).

Besonders geeignet für Studierende mit Interesse und Erfahrung in PDE und/oder Funktionalanalysis

2 Allgemeine Informationen und Organisation

Das Seminar wird en bloc stattfinden, ein Termin wird mit allen Teilnehmern zu Semesterbeginn vereinbart (voraussichtlich Anfang Juli). Homepage zur Veranstaltung: <http://www.uni-ulm.de/?91704>.

2.1 Voraussetzung und Scheinkriterien

Voraussetzungen zur Teilnahme: Funktionalanalysis erfolgreich absolviert, Interesse an der Analysis. Je nach Hintergrund und Interesse der Teilnehmer sind unterschiedliche Themen möglich (mit Verbindungen zu PDE, Stochastik, (Riemannscher) Geometrie, Variationsrechnung, Graphentheorie,...)

Neben einem Vortrag über 90 Minuten soll zum erfolgreichen Absolvieren des Seminars auch eine schriftliche Ausarbeitung des Themas (L^AT_EX) erfolgen (vom Modulhandbuch vorgeschrieben).

2.2 Anmeldung

Teilnehmer melden sich bitte per Mail (adrian.spener@uni-ulm.de und erscheinen beim **Treffen am ???.2016 um ?? im Raum ??**.

2.3 Sonstiges

Alle Themen eignen sich auch für eine Vertiefung im Rahmen einer Masterarbeit.

Hilfestellung bei der Vorbereitung eines Seminarvortrags liefern die Seite <http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag> und natürlich die Betreuer.

Literatur

- [AG13] Luigi Ambrosio and Nicola Gigli. *A User's Guide to Optimal Transport*, pages 1–155. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [AGS17] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, and Giuseppe Savaré. Diffusion, optimal transport and Ricci curvature for metric measure spaces. *Eur. Math. Soc. Newsl.*, (103):19–28, 2017.
- [BB00] Jean-David Benamou and Yann Brenier. A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem. *Numer. Math.*, 84(3):375–393, 2000.
- [BE85] D. Bakry and Michel Émery. Diffusions hypercontractives. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 177–206. Springer, Berlin, 1985.
- [BGL14] Dominique Bakry, Ivan Gentil, and Michel Ledoux. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*, volume 348 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Cham, 2014.
- [CEMS01] Dario Cordero-Erausquin, Robert J. McCann, and Michael Schmuckenschläger. A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb. *Invent. Math.*, 146(2):219–257, 2001.
- [DNS09] Jean Dolbeault, Bruno Nazaret, and Giuseppe Savaré. A new class of transport distances between measures. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 34(2):193–231, Feb 2009.
- [JKO98] Richard Jordan, David Kinderlehrer, and Felix Otto. The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(1):1–17, 1998.

- [Ket14] Christian Ketterer. Metric measure spaces with lower ricci curvature bounds. University Lecture from http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ketterer/lecture_notes_metric_measure_spaces.pdf, 2014.
- [LV09] John Lott and Cédric Villani. Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. *Ann. of Math. (2)*, 169(3):903–991, 2009.
- [Stu06] Karl-Theodor Sturm. On the geometry of metric measure spaces. I. *Acta Math.*, 196(1):65–131, 2006.
- [Vil03] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Vil09] Cédric Villani. *Optimal transport – Old and new*, volume 338 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [Wan11] Feng-Yu Wang. Equivalent semigroup properties for the curvature-dimension condition. *Bull. Sci. Math.*, 135(6-7):803–815, 2011.