

Vorlesungsskript Gewöhnliche Differentialgleichungen

Emil Wiedemann
Universität Ulm, SS 2020

Vorbemerkungen

Dies ist ein Skript zur Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen, die ich im Sommersemester 2020 an der Universität Ulm gehalten habe. Die Vorlesung richtete sich an Studierende der mathematischen Studiengänge typischerweise im vierten Semester, und umfaßte zwei Semesterwochenstunden.

Differentialgleichungen beschreiben Prozesse, die sich nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten in Raum und/oder Zeit entwickeln. Dementsprechend ubiquitär sind solche Gleichungen in allen Bereichen der quantitativen Wissenschaft: Praktisch alle fundamentalen Gesetze der Physik können als Differentialgleichung formuliert werden (zweites NEWTONSches Gesetz, MAXWELL-Gleichungen, EINSTEINSche Feldgleichungen, SCHRÖDINGER-Gleichung, KLEIN-GORDON, BOLTZMANN, etc.). Darüber hinaus verwendet man Differentialgleichungen in der Biologie (Populationsdynamik, Zellwachstum), der Finanzwissenschaft (BLACK-SCHOLES-Gleichung), der Modellierung von Waldbränden und gar von zwischenmenschlichen Beziehungen (kein Scherz: siehe [2]).

Man unterscheidet zwischen *gewöhnlichen* und *partiellen* Differentialgleichungen: Erstere sind Gleichungen für Funktionen *einer*, letztere für Funktionen *mehrerer* Variablen.

In dieser Vorlesung betrachten wir nur gewöhnliche Differentialgleichungen. Für diese gibt es (im Gegensatz zu den partiellen) eine allgemeine und befriedigende Existenz- und Eindeigkeitstheorie. Die Bachelor-Vorlesung “Elemente der partiellen Differentialgleichungen” kann parallel gehört werden.

Diese Vorlesung knüpft an die Grundvorlesungen Analysis und Lineare Algebra an; Kenntnisse der Maßtheorie werden nicht vorausgesetzt. Die erforderlichen Kenntnisse der Analysis können, falls nötig, in [3] aufgefrischt werden. Als begleitendes Lehrbuch empfehle ich [1].

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	2
Kapitel 1. Elementare Lösungsmethoden	4
1.1. Definition	4
1.2. Beispiele und Lösungsmethoden	5
Kapitel 2. Existenz- und Eindeigkeitstheorie	12
2.1. Vollständigkeit und Kompaktheit von Räumen stetiger Funktionen	12
2.2. Reduktion auf Systeme erster Ordnung	14
2.3. Das EULER-Verfahren und der Satz von PEANO	15
2.4. PICARD-Iteration und der Satz von PICARD-LINDELÖF	17
2.5. Das maximale Existenzintervall	19
2.6. Stetige Abhängigkeit von den Daten	22
Kapitel 3. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen	24
3.1. Das homogene Problem	25
3.2. Das inhomogene Problem	26
3.3. Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion	28
Kapitel 4. Stabilitätstheorie	33
4.1. Autonome Systeme und Phasenportraits	33
4.2. Stabilität	35
4.3. Stabilität linearer Systeme	37
4.4. Nichtlineare Systeme	38
Literaturverzeichnis	41

Elementare Lösungsmethoden

Zunächst definieren wir, was man unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE)¹ versteht. Im wesentlichen handelt es sich um eine Gleichung, die eine Funktion einer Variablen mit ihren Ableitungen in Beziehung setzt. Man kann auch Systeme mehrerer Gleichungen für mehrere Funktionen (und deren Ableitungen) betrachten. Die gesuchten Lösungen sind dementsprechend *Funktionen* (und nicht, wie bei algebraischen Gleichungen, Zahlen). Um ein Gefühl für ODEs zu bekommen, betrachten wir mehrere konkrete Beispiele, anhand derer wir typische Lösungsmethoden (Separation der Variablen, integrierender Faktor, Exponentialansatz) entwickeln. Man beachte allerdings, daß man im „echten Leben“ die meisten ODEs nicht durch Angabe einer expliziten Formel lösen kann (ebenso wie man oft für Integrale keine Lösung in geschlossener Form hinschreiben kann). Hauptziel dieser Vorlesung ist demnach nicht die Ausarbeitung von Rechenmethoden, sondern die Entwicklung einer allgemeinen Theorie von ODEs, selbst wenn deren Lösungen keine explizite Darstellung in geschlossener Form besitzen.

1.1. Definition

Gegeben eine ODE, so will man eine Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}^m$ finden, die die Gleichung löst ($I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall). Für die Bezeichnung dieser gesuchten Funktion gibt es, je nach Kontext, unterschiedliche Konventionen; zwei gebräuchliche Notationen sind $y = y(x)$, eine andere $x = x(t)$. Wir verwenden häufig letztere, d.h. die (potenzielle) Lösung einer Differentialgleichung wird typischerweise mit x bezeichnet und ist eine Funktion von t . Diese für Sie vielleicht ungewohnte Notation stammt aus der Physik, in der die Variable t als Zeit interpretiert wird. In der Physik schreibt man für die Ableitung von x nach t meist $\dot{x}(t)$ statt $x'(t)$. Wir bleiben bei $x'(t)$ und schreiben $x^{(n)}$ für die n -te Ableitung. Per Konvention ist die nullte Ableitung der Funktion x einfach x selbst.

DEFINITION 1.1 (gewöhnliche Differentialgleichung). Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* ist ein Ausdruck der Form

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad (1.1)$$

wobei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig ist auf dem offenen Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+nm}$.

Eine *Lösung* dieser Gleichung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine n -mal stetig differenzierbare Funktion $x: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, für die gilt

$$(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I$$

und

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I. \quad (1.2)$$

Wir nennen die Funktion f die *rechte Seite* der Gleichung und $n \in \mathbb{N}$ ihre *Ordnung*.

Meist betrachtet man ein *Anfangswertproblem*, d.h. man sucht eine Lösung, die zusätzlich die n Anfangsbedingungen

$$x(t^0) = x^0, \quad x'(t^0) = x^1, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t^0) = x^{n-1}$$

¹von engl. *ordinary differential equation*.

erfüllt für vorgegebene $(t^0, x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \in \Omega$.

1.2. Beispiele und Lösungsmethoden

BEISPIEL 1.2. Für $n = m = 1$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = x$ erhalten wir die Gleichung $x' = x$. Aus Analysis I wissen wir, daß das Anfangswertproblem mit $t^0 = 0$ und $x^0 = 1$ die eindeutige Lösung $x(t) = \exp(t)$ hat. Allgemein erhalten wir $x^0 \exp(t)$ als Lösung der Anfangswertaufgabe mit Anfangsdatum x^0 .

BEISPIEL 1.3. Für $n = m = 1$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t, x) = x^2$ erhält man die Differentialgleichung

$$x' = x^2.$$

Um eine Lösung des Anfangswertproblems mit $t^0 = 0$ und $x^0 > 0$ zu erhalten, bedienen wir uns der folgenden Heuristik²: Wir schreiben

$$\frac{dx}{dt} = x^2,$$

multiplizieren mit $\frac{dt}{x^2}$, und erhalten so

$$\frac{dx}{x^2} = dt,$$

und integrieren links von x^0 bis $x(t)$ und rechts von 0 bis t :

$$-\frac{1}{x} \Big|_{x^0}^{x(t)} = t,$$

also

$$x(t) = \frac{x^0}{1 - x^0 t}. \tag{1.3}$$

Selbstverständlich konstituiert diese Jonglage mit den infinitesimalen Größen dx und dt kein sauberes mathematisches Argument³, aber das braucht uns hier ausnahmsweise nicht zu scheren: Wir können durch Ableiten einfach direkt verifizieren, daß (1.3) tatsächlich das Anfangswertproblem löst. In der Tat,

$$x'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{x^0}{1 - x^0 t} \right) = \frac{(x^0)^2}{(1 - x^0 t)^2} = x(t)^2,$$

und $x(0) = x^0$.

Beachte allerdings, daß (1.3) nur bis zur Zeit $\frac{1}{x^0}$ definiert ist. Wir ziehen daraus die wichtige Schlußfolgerung, daß *das Intervall, auf dem die Lösung existiert, endlich sein kann* – selbst dann, wenn die rechte Seite für alle t existiert! (Im vorliegenden Beispiel ist f nicht einmal explizit von t abhängig.)

BEISPIEL 1.4 (Trennung der Variablen). Im vorigen Beispiel haben wir x und dx auf eine Seite und t und dt auf die andere Seite der Gleichung gebracht und dann jeweils integriert. Diese Technik heißt *Trennung der Variablen* (oder *Separation*) und funktioniert allgemein für Gleichungen erster Ordnung, deren rechte Seite als $f(t, x) = g(t)h(x)$ faktorisiert. Aus

$$x' = g(t)h(x)$$

erhalten wir nämlich

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt,$$

²Heuristik: nicht streng gerechtfertigtes Verfahren, von dem man sich dennoch die Lösung eines Problems erhofft.

³Mithilfe der Kettenregel läßt sich aus dieser Vorgehensweise dann allerdings doch ein mathematisch valides Argument machen, was den Lesenden zur Übung empfohlen sei.

und sofern $\frac{1}{h}$ und g integrierbar sind, ergibt sich

$$\int_{x^0}^{x(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t^0}^t g(s) ds.$$

Die Validität dieser Formel kann wieder mittels Kettenregel verifiziert werden. Gelingt die Integration in geschlossener Form, so ergibt sich daraus eine explizite Lösungsformel für $x(t)$.

BEISPIEL 1.5 (Nichteindeutigkeit). Sei weiterhin $n = m = 1$ und setze $f(x) = \sqrt{x}$, $t^0 = 0$, $x^0 = 0$. Offensichtlich ist $x \equiv 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Trennung der Variablen ergibt allerdings

$$\int_0^{x(t)} x^{-1/2} dx = t,$$

also $x(t) = \frac{t^2}{4}$. Durch Ableiten erkennt man, daß $\frac{t^2}{4}$ tatsächlich eine weitere Lösung ist. Wir sehen also, daß *dieselbe Anfangswertaufgabe unterschiedliche Lösungen haben kann!* Im nächsten Abschnitt werden wir eine hinreichende Bedingung an f für die Eindeutigkeit des Anfangswertproblems kennenlernen.

BEISPIEL 1.6. Wir lösen die Differentialgleichung

$$x' = \frac{2x}{t},$$

indem wir sie mit t^{-2} multiplizieren. Dann nämlich erhalten wir

$$0 = \frac{x'}{t^2} - \frac{2x}{t^3} = \frac{x't - 2x}{t^3} = \frac{x't^2 - 2xt}{t^4} = \left(\frac{x}{t^2} \right)'$$

nach Quotientenregel, also folgt $x/t^2 = \text{const}$ bzw. $x(t) = Ct^2$.

Diese Herleitung ist von begrenztem Nutzen, solange unklar bleibt, wie man auf die Multiplikation mit t^{-2} kommt. Dies wird im folgenden Beispiel erklärt:

BEISPIEL 1.7 (integrierender Faktor). Wir verallgemeinern das vorhergehende Beispiel, indem wir Gleichungen der Form

$$x' + p(t)x = q(t)$$

mit einer Anfangsbedingung $x(t^0) = x^0$ untersuchen. Setzen wir

$$m(t) := \exp \left(\int_{t^0}^t p(s) ds \right)$$

als sogenannten *integrierenden Faktor* und multiplizieren die Gleichung mit m durch, so folgt mit Produktregel

$$q(t)m(t) = x'(t)m(t) + x(t)m'(t) = (mx)'(t)$$

und nach Integration

$$m(t)x(t) = m(t^0)x^0 + \int_{t^0}^t q(s)m(s) ds.$$

Division durch $m(t)$ liefert schließlich eine Lösungsformel für $x(t)$.

In Beispiel 1.6 war $p(t) = -2t^{-1}$, $q = 0$, und man sieht leicht

$$\exp \left(\int_1^t p(s) ds \right) = t^{-2}.$$

Beispiel 1.6 ist also ein Spezialfall (für $t^0 = 1$) dieser allgemeineren Situation.

BEISPIEL 1.8 (radialsymmetrische Lösungen der LAPLACE-Gleichung). Betrachte die LAPLACE-Gleichung $\Delta f(x) = 0$ in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Wir erinnern uns aus Analysis II, daß

$$\Delta f(x) := \operatorname{div} \nabla f(x) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l^2}(x).$$

Wir suchen *radialsymmetrische* Lösungen, machen also den Ansatz $f(x) = v(r)$ für $r = |x|$. Dann ist (was man nachrechnen möge!)

$$\partial_l f(x) = v'(r) \frac{x_l}{r}, \quad \partial_{ll} f(x) = v''(r) \frac{x_l^2}{r^2} + v'(r) \frac{r^2 - x_l^2}{r^3}$$

und somit

$$\Delta f(x) = \sum_{l=1}^n \partial_{ll} f(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Setzen wir noch $u := v'$, so erhalten wir die ODE $u' + \frac{n-1}{r}u = 0$ und erhalten ähnlich wie in Beispiel 1.6 (oder durch Trennung der Variablen)

$$u(r) = Cr^{1-n}.$$

Eine weitere Integration ergibt

$$f(x) = v(r) = \begin{cases} C_1 \log r + C_2 & \text{für } n = 2, \\ \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2 & \text{für } n \geq 3, \end{cases}$$

wobei die Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar sind. Das Vorgehen, durch Symmetrieanahmen eine partielle auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückzuführen, ist oft sehr nützlich.

BEISPIEL 1.9 (harmonischer Oszillator). Ein Federpendel der Masse m erfährt nach dem HOOKEschen Gesetz bei einer Auslenkung x eine lineare Rückstellkraft $F(x) = -Dx$, wobei $D > 0$ die *Federkonstante* ist. Das zweite NEWTONsche Gesetz liefert also die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$mx'' + Dx = 0$$

bzw.

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.4}$$

mit der *Eigenfrequenz* $\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$. Für lineare⁴ Gleichungen wie die vorliegende empfiehlt sich ein Exponentialansatz $x(t) = \exp(\alpha t)$, wobei der Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ gesucht ist. Einsetzen in (1.4) liefert die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0,$$

also $\alpha = \pm i\omega_0$; es ist daher sowohl $\exp(i\omega_0 t)$ als auch $\exp(-i\omega_0 t)$ eine Lösung. Da (1.4) *linear* in x ist und damit die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung ist⁵, erhalten wir demzufolge

$$x(t) = C_1 \exp(i\omega_0 t) + C_2 \exp(-i\omega_0 t)$$

als Lösungen der ODE.

Sind nun $x(0) = x^0$ und $x'(0) = x^1$ vorgegebene Anfangsdaten, so werden die komplexen Konstanten C_1, C_2 dergestalt bestimmt, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Für $x^1 = 0$ erhalten wir in dieser Weise das lineare (algebraische) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= x^0 \\ C_1 - C_2 &= 0 \end{aligned}$$

⁴Lineare ODEs behandeln wir noch gesondert in Kapitel 3.

⁵Diese Eigenschaft heißt *Superpositionsprinzip*.

mit Lösung $C_1 = C_2 = \frac{x^0}{2}$. Wir lösen das Anfangswertproblem also durch

$$x(t) = \frac{x^0}{2} (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)) = x^0 \cos(\omega_0 t),$$

also eine Kosinusschwingung mit Amplitude x^0 und Frequenz ω_0 (daher die Bezeichnung „Eigenfrequenz“).

BEISPIEL 1.10 (gedämpfter harmonischer Oszillator). Fügen wir zur Oszillatorgleichung (1.4) noch einen Dämpfungsterm hinzu (z.B. um Reibungseffekte zu berücksichtigen), so erhalten wir unter der Annahme, daß die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit ist,

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = 0$$

für eine Konstante $\lambda > 0$. Der gleiche Ansatz wie im ungedämpften Falle, also $x(t) = \exp(\alpha t)$, liefert nun die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2 = 0 \tag{1.5}$$

mit den beiden Lösungen $\alpha_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. Die ODE hat als Lösungen daher

$$x(t) = C_1 \exp(\alpha_+ t) + C_2 \exp(\alpha_- t). \tag{1.6}$$

Ist die Dämpfung stark in dem Sinne $\lambda > \omega_0^6$, so sind α_{\pm} beide reell und negativ, und wir erhalten exponentiell abklingende Lösungen ohne Schwingungsverhalten.

Ist die Dämpfung dagegen schwach, d.h. $\lambda < \omega_0$, so sind α_{\pm} zueinander konjugiert komplexe Zahlen mit negativem Realteil; setzen wir als Anfangsdaten $x^0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $x^1 = 0$, resultiert die Lösung⁷

$$x(t) = x^0 \exp(-\lambda t) \cos(\omega_d t),$$

wobei $\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \in \mathbb{R}$. Der Oszillator schwingt also mit der gedämpften Frequenz $\omega_d < \omega_0$ und einer exponentiell abklingenden Amplitude.

Betrachten wir schließlich den kritischen Fall $\lambda = \omega_0$, sodaß $\alpha_+ = \alpha_- = -\lambda$. Wir erhalten wie zuvor Lösungen der Gestalt $x(t) = C_1 \exp(-\lambda t)$ mit $C_1 \in \mathbb{C}$ beliebig, die allerdings nicht ausreichen, um alle Anfangswertprobleme der Form $x(0) = x^0$ und $x'(0) = x^1$ zu lösen (denn dafür fehlt der zweite Parameter C_2 , mit dem man „spielen“ könnte). Wir machen daher *ad hoc* den Ansatz $x(t) = t \exp(-\lambda t)$, den wir im weiteren Verlauf der Vorlesung systematischer erklären werden. Einsetzen dieses Ansatzes in (1.5) zeigt unter Berücksichtigung von $\lambda = \omega_0$, daß $x(t) = t \exp(-\lambda t)$ die ODE löst, und wir erhalten so eine allgemeine Lösung

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\lambda t),$$

die qualitativ dem Verhalten im Kriechfall entspricht (exponentielles Abklingen ohne Oszillation). Wählen wir als Anfangswerte etwa $x(0) = x^0$, $x'(0) = 0$, so erhalten wir als Lösung nach kurzer Rechnung $x(t) = x^0(1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$.

BEISPIEL 1.11 (erzwungene Schwingung). Schließlich können wir das Modell des gedämpften harmonischen Oszillators noch um eine externe Kraft erweitern. Wir wählen hier als externe Kraft $F(t) = A \exp(i\omega t)$ und erhalten die Gleichung

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = \frac{A}{m} \exp(i\omega t). \tag{1.7}$$

⁶Diese Situation heißt *Kriechfall*.

⁷Bitte nachrechnen! Man erinnere sich an die Formel $\exp(i\gamma) = \cos(\gamma) + i \sin(\gamma)$.

Als Ansatz wählen wir $x(t) = C \exp(i\omega t)$, nehmen also gewissermaßen an, daß der externe Antrieb dem System seine Frequenz ω vollständig „aufzwingt“. Der Ansatz liefert die Gleichung

$$C(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2) = \frac{A}{m},$$

also erhalten wir als Lösung $\frac{A}{m}\chi_\omega \exp(i\omega t)$ mit der *Suszeptibilität*

$$\chi_\omega = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2}.$$

Dies ist allerdings nur eine Lösung von (1.7). Weitere Lösungen können wir durch Superposition (d.h. Addition) dieser speziellen Lösung mit Lösungen der homogenen Gleichung (1.5) erhalten (wir nehmen nun $\lambda < \omega_0$ an):

$$x(t) = \exp(-\lambda t)[C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t)] + \frac{A}{m}\chi_\omega \exp(i\omega t).$$

Von physikalischer Relevanz ist nur der Realteil dieser Lösung.

Aufgrund des exponentiellen Abklingverhaltens dominiert für große Zeiten (nach der *Einschwingphase*) der letzte Summand, der eine Schwingung mit Amplitude

$$A(\omega) := \frac{A}{m}|\chi_\omega| = \frac{A}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

beschreibt. Eine Kurvendiskussion der Funktion $\omega \mapsto A(\omega)$ ergibt, daß für kleine λ bei der *Resonanzfrequenz* $\omega_{res} := \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ ein globales Maximum vorliegt mit dem Wert

$$A_{res} := A(\omega_{res}) = \frac{A}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}},$$

der für kleine λ sehr groß wird. Im Extremfall der ungedämpften Schwingung ($\lambda = 0$) ist die Resonanzfrequenz gleich der Eigenfrequenz, und die Resonanzamplitude ist unendlich. Man bezeichnet dieses Szenario als *Resonanzkatastrophe*.

BEISPIEL 1.12 (Räuber-Beute-Modell). Bisher war stets $m = 1$, d.h. wir haben *skalare* Differentialgleichungen studiert. Wir betrachten nun ein System von zwei gekoppelten Gleichungen: Wir nehmen $n = 1$, $m = 2$, $f(x, y) = (x(\alpha - \beta y), y(\delta x - \gamma))$ für positive reelle Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sodaß das resultierende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= x(\alpha - \beta y), \\ y' &= y(\delta x - \gamma) \end{aligned} \tag{1.8}$$

lautet. Es handelt sich hier wegen der Terme xy um ein *nichtlineares* System. Die Gleichungen (1.8) sind eines der einfachsten nichttrivialen Modelle der Populationsdynamik; sie heißen *Lotka-Volterra-Gleichungen* oder auch *Räuber-Beute-Modell*. Letztere Bezeichnung motiviert sich aus der folgenden Interpretation: Ein Ökosystem werde von zwei Populationen der Größe x bzw. y bevölkert, wobei sich die Beutepopulation x von einer unbegrenzt verfügbaren Pflanze und die Räuberpopulation y ausschließlich von Mitgliedern der Beutepopulation ernährt. Dann modelliert (1.8) die zeitliche Entwicklung der beiden Populationsgrößen. Hierbei ist α die Reproduktionsrate der Beutetiere in Abwesenheit der Räuber, β proportional zur mittleren Häufigkeit, mit der ein gegebenes Beutetier auf einen Räuber trifft, δ proportional zur mittleren Häufigkeit, mit der ein gegebenes Raubtier auf Beute trifft, und γ die Sterberate der Raubtiere in Abwesenheit von Beute.

Das Räuber-Beute-Modell kann im allgemeinen nicht explizit gelöst werden, aber wir können zumindest nach *Gleichgewichtszuständen* suchen, also nach konstanten Lösungen, bei denen $x' = y' = 0$: Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn $(x, y) = (0, 0)$ oder $(x, y) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$. Zwei weitere Lösungen, die man leicht findet, beschreiben die Situation,

daß eine der beiden Populationen gar nicht vorhanden ist: $(x(t), y(t)) = (x^0 \exp(\alpha t), 0)$ und $(x(t), y(t)) = (0, y^0 \exp(-\gamma t))$.

BEISPIEL 1.13 (SIR-Modell der Epidemiologie). Betrachte aus aktuellem Anlaß das nichtlineare System dreier gekoppelter ODEs

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI, \\ I' &= \beta SI - \gamma I, \\ R' &= \gamma I. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Hierbei sind die positiven Zahlen β und γ gegebene Parameter und S, I, R die gesuchten Funktionen. Beachten wir zuerst, daß $S' + I' + R' = 0$ gilt, so erkennen wir $N := S + I + R$ als konstant.

Die Interpretation lautet wie folgt: N ist die Gesamtpopulation, S die Zahl der Individuen, die noch gesund sind, aber infiziert werden könnten, I die Zahl der aktuell Infizierten, und R die Zahl der (nunmehr immunen) Genesenen. Die Parameter β und γ beschreiben die Infektions- bzw. Genesungsrate. Die erste Gleichung besagt also, daß die gesunde Population mit einer Rate abnimmt, die proportional zu den Begegnungen gesunder und Infizierter Individuen (also zu SI) ist. Der Parameter β gibt also an, wie wahrscheinlich eine Infektion durch eine solche Begegnung ist. Die zweite Gleichung beschreibt, daß dementsprechend die Anzahl der Erkrankten wächst (erster Term auf der rechten Seite), aber auch durch Genesung zurückgeht (zweiter Term). Der Parameter γ gibt also an, welcher Anteil der Erkrankten während einer Zeiteinheit genest. Entsprechend nimmt die Zahl der immunen Individuen zu (dritte Gleichung).

Das Modell bildet die Realität natürlich in vieler Weise stark vereinfacht ab: So wird angenommen, daß ein einmal genesenes Individuum immun bleibt; vor allem aber wird angenommen, daß Geburten- und Sterberate der Population (aufgrund des Infektionsgeschehens oder aus anderen Ursachen) gegenüber der Infektions- und Genesungsrate vernachlässigbar gering sind, sodaß während des epidemiologischen Geschehens die Gesamtbevölkerung annähernd konstant bleibt. Diese Modellannahme ist natürlich bei Epidemien mit vielen Erkrankten und hoher Letalität ungeeignet. Außerdem könnten sich durch Mutation des Krankheitserregers die Parameter β und γ mit der Zeit verändern, das Infektionsgeschehen könnte von räumlicher Struktur abhängen (hohe vs. niedrige Populationsdichte) etc. etc.

Zur Analyse dieses Modells dividieren wir jedenfalls die erste durch die dritte Gleichung und schreiben $\theta := \frac{\beta}{\gamma}$. Wir erhalten so, nach etwas Umstellen,

$$\frac{S'}{S} = -\theta R'.$$

Integrieren wir beide Seiten in der Zeit von 0 bis t , folgt

$$\log S(t) = \log S(0) - \theta(R(t) - R(0)),$$

also nach Exponentieren

$$S(t) = S(0) \exp(-\theta(R(t) - R(0))). \tag{1.10}$$

Betrachten wir nun heuristisch die Langzeitasymptotik des Modells, also das Verhalten für $t \rightarrow \infty$. Aus der zweiten Gleichung erkennt man, daß die Zahl $I(t)$ der Infizierten exponentiell mit der Zeit abklingt, insbesondere $I_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$. Aus $N = S_\infty + I_\infty + R_\infty$ und (1.10) folgt daher

$$R_\infty = N - S_\infty = N - S(0) \exp(-\theta(R_\infty - R(0))) < N.$$

Die Epidemie endet also (im Falle $S(0) > 0$) nicht erst dann, wenn *alle* Individuen zunächst erkrankt und anschließend immun geworden sind, sondern bereits früher, sodaß ein gewisser Anteil der Population von der Epidemie verschont bleibt.

Eine weitere Beobachtung betrifft den *Beginn* der Epidemie: Die zweite Gleichung kann geschrieben werden als

$$I' = \gamma I (\theta S(t) - 1),$$

also insbesondere

$$I'(0) = \gamma I (\theta S(0) - 1).$$

Es folgt: Ist $\theta > \frac{1}{S(0)}$, so ist $I'(0) > 0$, also wächst die Zahl der Infizierten. Ist dagegen $\theta \leq \frac{1}{S(0)}$, bricht die Epidemie gar nicht erst aus. Das Verhältnis der Parameter β und γ bestimmt also entscheidend den Verlauf der Epidemie. Je präziser man diese Parameter also schätzen kann, desto zuverlässiger ist die Vorhersage des Modells über die epidemiologische Gefahr der Infektion.

Auch wenn, wie erläutert, dieses Modell stark unterkomplex für die meisten realen Situationen ist, zeigt es doch, daß mathematische Methoden in der Epidemiologie hilfreich sein können. In der Tat werden elaboriertere Versionen des hier vorgestellten Modells (das von KERMACK-MCKENDRICK entwickelt wurde) bis heute in der Epidemiologie verwendet.

Existenz- und Eindeigkeitstheorie

Wir lernen hier zwei Resultate kennen, die nicht nur zeigen, daß eine gewöhnliche Differentialgleichung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen eine Lösung besitzt, sondern auch, *wie* man diese Lösungen näherungsweise berechnen kann. Es stellt sich heraus, daß zwei gleichermaßen naheliegende, aber sehr unterschiedliche Algorithmen zu Lösungen der Gleichung führen: das *EULERSche Polygonzugverfahren* sowie die *PICARD-Iteration*. Zu Fragen der Fehlerabschätzung, der algorithmischen Implementierung etc. sei auf Vorlesungen der Numerik verwiesen. Zunächst aber treffen wir einige Vorbereitungen: Zum einen müssen wir über Vollständigkeit und Kompaktheit in Räumen stetiger Funktionen nachdenken. Zum anderen führen wir das Studium von ODEs beliebiger Ordnung auf dasjenige von ODEs erster Ordnung zurück.

2.1. Vollständigkeit und Kompaktheit von Räumen stetiger Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und bezeichne mit $BC(I; \mathbb{R}^m)$ den Raum der beschränkten stetigen Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die gleichmäßige Konvergenz läßt sich auf $BC(I; \mathbb{R}^m)$ als die Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ interpretieren, das heißt: Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen in $BC(I; \mathbb{R}^m)$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $x \in BC(I; \mathbb{R}^m)$, wenn gilt

$$\|x_k - x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x_k(t) - x(t)| \rightarrow 0$$

mit $k \rightarrow \infty$. Da gleichmäßige Limes beschränkter stetiger Funktionen wieder beschränkt und stetig sind [3, Satz 5.31], ist $BC(I; \mathbb{R}^m)$ abgeschlossen bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Um später den Fixpunktsatz von BANACH [3, Satz 6.34] anwenden zu dürfen, zeigen wir die Vollständigkeit dieses Raums:

SATZ 2.1 (Vollständigkeit von $BC(I; \mathbb{R}^m)$). Jede CAUCHYfolge in $(BC(I; \mathbb{R}^m); \|\cdot\|_\infty)$ ist konvergent. Der Raum $(BC(I; \mathbb{R}^m); \|\cdot\|_\infty)$ ist also ein vollständiger metrischer Raum.

BEWEIS. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset BC(I; \mathbb{R}^m)$ CAUCHY. Nach Voraussetzung gibt es also zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $k, l \geq N$ gilt $\|x_k - x_l\|_\infty < \epsilon$. Insbesondere gilt dies punktweise, d.h. für jedes $t \in I$ gilt $|x_k(t) - x_l(t)| < \epsilon$. Da \mathbb{R}^m vollständig ist, folgt die punktweise Konvergenz $x_k(t) \rightarrow x(t)$ für eine Abbildung $x: I \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wir zeigen, daß diese Konvergenz sogar gleichmäßig ist: In der Tat, für N wie oben und für alle $k, l \geq N$ gilt für alle $t \in I$

$$|x_k(t) - x_l(t)| < \epsilon.$$

Für festes t nehmen wir den Grenzwert $l \rightarrow \infty$, nutzen die punktweise Konvergenz $\lim_{l \rightarrow \infty} x_l(t) = x(t)$ aus und erhalten so

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |x_l(t) - x_k(t)| = |x(t) - x_k(t)| \leq \epsilon.$$

Da N nicht von t abhing, erhalten wir wie behauptet die gleichmäßige Konvergenz $x_k \rightarrow x$.

Als gleichmäßiger Limes beschränkter Funktionen ist x beschränkt (wähle etwa N so groß, daß $\|x - x_N\|_\infty < 1$, dann ist nach Dreiecksungleichung $\|x\|_\infty \leq \|x - x_N\|_\infty + \|x_N\|_\infty < \infty$), und aus Satz 5.31 in [3] folgt die Stetigkeit von x . \square

KOROLLAR 2.2. Ist I ein kompaktes Intervall, so ist der Raum der stetigen Funktionen $(C(I; \mathbb{R}^m); \|\cdot\|_\infty)$ vollständig.

BEWEIS. Aus Analysis I wissen wir, daß eine stetige Funktion auf einem Kompaktum beschränkt ist. Daher ist in diesem Fall $C(I; \mathbb{R}^m) = BC(I; \mathbb{R}^m)$, und wir können Satz 2.1 anwenden. \square

BEMERKUNG 2.3. Satz 2.1 und Korollar 2.2 bleiben – mit unveränderten Beweisen! – richtig, wenn man I durch einen beliebigen metrischen Raum (der für Korollar 2.2 kompakt angenommen wird) und \mathbb{R}^m durch einen beliebigen BANACHraum (also vollständigen normierten Raum) ersetzt. Dies gilt auch für den nun folgenden Satz von ARZELÀ-ASCOLI.

Eine Funktionenfolge in $BC(I; \mathbb{R}^m)$ heißt *gleichmäßig beschränkt*, wenn sie als Folge in $(BC(I; \mathbb{R}^m); \|\cdot\|_\infty)$ beschränkt ist, d.h. wenn

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\|_\infty < \infty.$$

In der Analysis haben Sie den Begriff der Kompaktheit kennengelernt und gezeigt, daß er (in metrischen Räumen) äquivalent zur Folgenkompaktheit ist. Folgendes Beispiel zeigt, daß $BC(I; \mathbb{R}^m)$ mit der Supremumsnorm im allgemeinen *nicht* kompakt ist: Für $I = [0, 1]$ ist durch $x_k(t) = \sin(kt)$ eine beschränkte Folge in $BC(I; \mathbb{R}^m)$ gegeben, für die allerdings keine Teilfolge gleichmäßig konvergiert (Übung). Man benötigt für die Kompaktheit noch ein weiteres Kriterium:

DEFINITION 2.4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodaß für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $s, t \in I$ mit $|s - t| < \delta$ gilt:

$$|x_k(s) - x_k(t)| < \epsilon.$$

Hier ist die Reihenfolge der Quantoren von entscheidender Bedeutung: Das δ hängt *nicht* von k und von s, t ab! Man sieht leicht, daß jedes Glied x_k einer gleichgradig stetigen Funktionenfolge gleichmäßig stetig ist.

Der berühmte Kompaktheitssatz von ARZELÀ-ASCOLI kann nun wie folgt formuliert werden:

SATZ 2.5 (ARZELÀ-ASCOLI¹). Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset BC(I; \mathbb{R}^m)$ eine gleichmäßig beschränkte gleichgradig stetige Folge. Dann existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$.

BEWEIS. *Schritt 1.* Wir zeigen zunächst die Existenz einer Teilfolge, die punktweise auf $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ konvergiert. Sei dazu $(t_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [a, b]$. Dann ist aufgrund der gleichmäßigen Beschränktheit $(x_k(t_1))_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R}^m , die nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j^{(1)}}(t_1))_{j \in \mathbb{N}}$ besitzt.

Betrachte als nächstes die Folge $(x_{k_j^{(1)}}(t_2))_{j \in \mathbb{N}}$. Auch diese besitzt nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j^{(2)}}(t_2))_{j \in \mathbb{N}}$. Beachte, daß aber auch $(x_{k_j^{(2)}}(t_1))_{j \in \mathbb{N}}$ – als Teilfolge von $(x_{k_j^{(1)}}(t_1))_{j \in \mathbb{N}}$ – konvergiert!

Die Wiederholung dieser Auswahl von Teilfolgen für t_1, t_2, \dots liefert für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_{k_j^{(i)}})_{j \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$(1) \quad (x_{k_j^{(i)}})_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Teilfolge von } (x_{k_j^{(i-1)}})_{j \in \mathbb{N}};$$

¹Der Satz stammt aus dem späten 19. Jahrhundert und kann als Prototyp eines Kompaktheitssatzes in Funktionenräumen angesehen werden, auf dem z.B. die Sätze von RELICH und AUBIN-LIONS beruhen.

(2) $\left(x_{k_j^{(i)}}(t_\alpha)\right)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $\alpha = 1, \dots, i$.

Definiere nun die sogenannte *Diagonalfolge* durch

$$y_j(t) := x_{k_j^{(j)}}(t), \quad j \in \mathbb{N}, \quad t \in [a, b].$$

Dann ist (y_j) eine Teilfolge der ursprünglichen Folge (x_k) , und (y_j) ist punktweise konvergent auf $\mathbb{Q} \cap [a, b]$: In der Tat, für jedes t_α aus unserer Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ ist die Folge

$$(y_j(t_\alpha))_{j \in \mathbb{N}} = (x_{k_j^{(j)}}(t_\alpha))_{j \in \mathbb{N}}$$

ab dem Index $j = \alpha$ eine Teilfolge der konvergenten Folge $(x_{k_j^{(\alpha)}}(t_\alpha))_{j \in \mathbb{N}}$, was aus den Eigenschaften 1) und 2) folgt.

Schritt 2. Wir zeigen nun, daß die Folge (y_j) sogar gleichmäßig auf ganz $[a, b]$ konvergiert. Sei dazu $\epsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$ so, daß aus $|t - s| < \delta$ folgt

$$|y_j(t) - y_j(s)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}; \quad (2.1)$$

dies ist aufgrund der Voraussetzung der gleichgradigen Stetigkeit möglich.

Sei $a = s_0 < s_1 < \dots < s_M = b$ eine Zerlegung mit $s_i - s_{i-1} < \delta$ für alle $i = 1, \dots, M$, und wähle für jedes $i = 1, \dots, M$ einen Punkt $\tilde{t}_i \in (s_{i-1}, s_i) \cap \mathbb{Q}$. Da $y_j(\tilde{t}_i)$ für jedes $i = 1, \dots, M$ konvergiert und es nur endlich viele solcher \tilde{t}_i gibt, können wir $J \in \mathbb{N}$ so groß wählen, daß

$$|y_j(\tilde{t}_i) - y_l(\tilde{t}_i)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, M \text{ und alle } j, l \geq J. \quad (2.2)$$

Sei schließlich $t \in [a, b]$, dann ist t in einem der Intervalle $[s_{i-1}, s_i]$ enthalten, und dementsprechend gilt $|t - \tilde{t}_i| < \delta$. Deshalb ist für $j, l \geq J$

$$|y_j(t) - y_l(t)| \leq |y_j(t) - y_j(\tilde{t}_i)| + |y_j(\tilde{t}_i) - y_l(\tilde{t}_i)| + |y_l(\tilde{t}_i) - y_l(t)| < \epsilon$$

wegen (2.1) und (2.2). Da dies für alle $t \in [a, b]$ gilt, ist sogar $\|y_j - y_l\|_\infty < \epsilon$, also ist die Folge (y_j) CAUCHY bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Die gleichmäßige Konvergenz folgt nun mit Satz 2.1. \square

BEMERKUNG 2.6. Es ist nicht schwer zu zeigen (z.B. mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung), daß eine Folge differenzierbarer Funktionen gleichgradig stetig ist, sofern $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|x'_k\|_\infty < \infty$. Ein Spezialfall des Satzes von ARZELÀ-ASCOLI lautet somit: Eine Funktionenfolge $(x_k) \subset C^1([a, b]; \mathbb{R}^m)$ besitzt eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, wenn sowohl (x_k) als auch (x'_k) gleichmäßig beschränkt sind.

2.2. Reduktion auf Systeme erster Ordnung

Betrachte erneut die Oszillatorgleichung (1.4)

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Mit der neuen Variablen $y := x'$ ist dies äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -\omega_0^2 x. \end{aligned}$$

Wir haben also die ursprüngliche Gleichung zweiter Ordnung in ein äquivalentes System zweier Gleichungen erster Ordnung umgeformt.

Dies geht auch allgemein: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+nm}$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $x : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad (2.3)$$

dann ist $(x_1, x_2, \dots, x_n) := (x, x', \dots, x^{(n-1)}) : I \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\dots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ist umgekehrt eine Lösung $(x_1, x_2, \dots, x_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ von (2.4) gegeben, so ist x_1 eine Lösung von (2.3).

Wir können also jedes System von m Gleichungen n -ter Ordnung in ein äquivalentes System von nm Gleichungen erster Ordnung umformen. Dies hat den großen Vorteil, daß wir bei den folgenden theoretischen Studien nur Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten müssen.

2.3. Das EULER-Verfahren und der Satz von PEANO

Eine Veranschaulichung gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form $x' = f(t, x)$ gelingt im Falle $m = 1$ folgendermaßen: Im t - x -Koordinatensystem betrachte man das Vektorfeld $F(t, x) := (1, f(t, x))$; der Vektor, der an den Punkt (t^0, x^0) angeheftet wird, hat also Steigung $f(t^0, x^0)$, und ist deshalb tangential zum Graphen einer Lösung von $x' = f(t, x)$, die durch den Punkt (t^0, x^0) verläuft.

Die Idee des Euler-Verfahrens liegt darin, für eine Zerlegung des Zeitintervalls in N Teilintervalle eine stückweise affine Funktion $x^N(t)$ zu finden, deren Graph an jedem Stützpunkt t^k die Steigung $f(t^k, x^N(t^k))$ hat. Wir werden zeigen, daß mit der Schrittweite $\frac{1}{N} \rightarrow 0$ die stückweise affine Approximation gegen eine Lösung der Differentialgleichung konvergiert (zumindest eine Teilfolge).

Wir präzisieren dies wie folgt: Wir schreiben wie üblich $B_r(x^0)$ für die offene Kugel um x^0 mit Radius r (bzgl. der euklidischen Norm), also

$$B_r(x^0) := \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x^0| < r\}.$$

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig auf dem offenen Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m}$, $(t^0, x^0) \in \Omega$, und sei $I \times \overline{B_r(x^0)} \subset \Omega$ für ein kompaktes Intervall $I = [t^0, T] \subset \mathbb{R}$ und ein $r > 0$. Da $|f|$ stetig ist, ist es auf der kompakten Menge $I \times \overline{B_r(x^0)}$ beschränkt durch ein $M > 0$. Setze

$$\tau := \min \left\{ T, t^0 + \frac{r}{M} \right\},$$

dann definieren wir für $N \in \mathbb{N}$ Stützstellen $t^0, t^1, \dots, t^N = \tau$ durch

$$t^k = t^0 + \frac{k}{N}(\tau - t^0), \quad k = 0, \dots, N,$$

und die stückweise affine Funktion $x^N : [t^0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$x^N(t^0) = x^0, \quad x^N(t) = x^N(t^k) + (t - t^k)f(t^k, x^N(t^k)), \quad t \in (t^k, t^{k+1}] \tag{2.5}$$

für $k = 0, \dots, N-1$. Damit x^N wohldefiniert sei, müssen wir zeigen $x^N(t) \in B_r(x^0)$ für alle $t \in [t^0, \tau]$. In der Tat, nach Dreiecksungleichung gilt für $t \in (t^k, t^{k+1}]$

$$|x^N(t) - x^0| \leq \frac{\tau - t^0}{N} \sum_{j=0}^k |f(t^j, x^N(t^j))| \leq M(\tau - t^0) \leq r \tag{2.6}$$

nach Wahl von τ . Wir bemerken außerdem, daß das so definierte x^N stetig ist auf $[t^0, \tau]$.

Da τ von N unabhängig ist, erhalten wir so eine Folge $(x^N)_{N \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $[t^0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Bevor wir zeigen, daß diese Folge gleichmäßig gegen eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(0) = x^0$ konvergiert, benötigen wir noch folgende Aussage, die sofort aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

PROPOSITION 2.7. *Eine stetige Funktion $x : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ löst die Anfangswertaufgabe $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$ genau dann, wenn*

$$x(t) = x^0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Nach diesen Prolegomena können wir unseren ersten Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen beweisen:

SATZ 2.8 (PEANO²). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m}$ offen, $(t^0, x^0) \in \Omega$, und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Dann existiert ein $\tau > t^0$ und eine Lösung $x : [t^0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t^0) = x^0.$$

BEWEIS. *Schritt 1.* Die Größen r , M und τ seien wie in den obigen Vorbetrachtungen gewählt, ebenso die Folge stetiger (stückweise affiner) Funktionen $x^N : [t^0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nach (2.6) sind die x^N gleichmäßig beschränkt, denn $|x^N(t)| \leq |x^0| + r$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [t^0, \tau]$.

Wir behaupten, daß die Folge $(x^N)_{N \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig ist. Seien nämlich $\epsilon > 0$ und $\delta < \frac{\epsilon}{M}$. Sind dann $s, t \in [t^0, \tau]$ mit $|s - t| < \delta$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben, so gibt es $j, k \in 0, \dots, N-1$ mit $s \in [t^j, t^{j+1}]$ und $t \in [t^k, t^{k+1}]$. Ohne Einschränkung sei $k \geq j$. Falls $k = j$, so gilt mit (2.5) dann die Abschätzung

$$|x^N(t) - x^N(s)| \leq |f(t^k, x^N(t^k))| |t - s| \leq M\delta < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Ist dagegen $k > j$, so ist $s \leq t$, und es gilt wiederum mit (2.5)

$$\begin{aligned} |x^N(t) - x^N(s)| &\leq |x^N(s) - x^N(t^{j+1})| + \sum_{l=j+1}^{k-1} |x^N(t^l) - x^N(t^{l+1})| + |x^N(t^k) - x^N(t)| \\ &\leq |f(t^j, x^N(t^j))| (t^{j+1} - s) \\ &\quad + \sum_{l=j+1}^{k-1} |f(t^l, x^N(t^l))| (t^{l+1} - t^l) + |f(t^k, x^N(t^k))| (t - t^k) \\ &\leq M(t - s) \leq M\delta < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die gleichgradige Stetigkeit gezeigt. Mit dem Satz von ARZELÀ-ASCOLI folgt die Existenz einer Teilfolge $(x^{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig auf $[t^0, \tau]$ gegen eine stetige Funktion $\bar{x} : [t^0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ konvergiert. Wir bezeichnen die konvergente Teilfolge (strenggenommen inkorrekt) weiterhin mit $(x^N)_{N \in \mathbb{N}}$.

Schritt 2. Wir zeigen, daß \bar{x} eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Seien dazu $t \in [t^0, \tau]$ und $\epsilon > 0$. Wir schreiben (2.5) in der Form

$$\begin{aligned} x^N(t) &= x^N(t^k) + (t - t^k) f(t^k, x^N(t^k)) \\ &= x^0 + \frac{\tau - t^0}{N} \sum_{j=0}^{k-1} f(t^j, x^N(t^j)) + (t - t^k) f(t^k, x^N(t^k)), \end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei k so gewählt ist, daß $t \in (t^k, t^{k+1}]$.

²aus dem Jahr 1890.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz $x^N \rightarrow \bar{x}$ konvergiert die linke Seite gegen $\bar{x}(t)$. Für die rechte Seite stellen wir fest, daß aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f und der gleichmäßigen Konvergenz $x^N \rightarrow \bar{x}$ für hinreichend großes N gilt

$$\sup_{s \in [t^0, \tau]} |f(s, \bar{x}(s)) - f(s, x^N(s))| < \frac{\epsilon}{2(\tau - t^0)}; \quad (2.8)$$

weiter erkennen wir aber den Ausdruck

$$\frac{\tau - t^0}{N} \sum_{j=0}^{k-1} f(t^j, \bar{x}(t^j)) + (t - t^k) f(t^k, \bar{x}(t^k))$$

als RIEMANNSCHE Summe [3, Satz 4.27] der Funktion $s \mapsto f(s, \bar{x}(s))$ auf dem Intervall $[t^0, t]$ bezüglich der Zerlegung

$$t^0 < t^1 < \dots < t^k < t,$$

deren Feinheit mit wachsendem N gegen null strebt; wir können also N so groß wählen, daß

$$\left| \frac{\tau - t^0}{N} \sum_{j=0}^{k-1} f(t^j, \bar{x}(t^j)) + (t - t^k) f(t^k, \bar{x}(t^k)) - \int_{t^0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zusammen mit (2.8) sehen wir, daß der Betrag der Differenz zwischen der rechten Seite von (2.7) und $x^0 + \int_{t^0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds$ höchstens ϵ ist. Lassen wir also auf beiden Seiten von (2.7) $N \rightarrow \infty$, so erhalten wir

$$\bar{x}(t) = x^0 + \int_{t^0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds,$$

und nach Proposition 2.7 ist \bar{x} in der Tat eine Lösung der Anfangswertaufgabe. □

Man beachte, daß die Lösung nicht eindeutig sein muß (s. Beispiel 1.5).

2.4. PICARD-Iteration und der Satz von PICARD-LINDELÖF

Eine weitere Methode zur näherungsweise Lösung einer Anfangswertaufgabe wird durch Proposition 2.7 suggeriert: Gemäß dieser Proposition ist eine Lösung von $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$ ein Fixpunkt der PICARD-Abbildung

$$x \mapsto \left(t \mapsto x^0 + \int_{t^0}^t f(s, x(s)) ds \right),$$

und der Beweis des BANACHSchen Fixpunktsatzes zeigt, daß durch Iteration dieser Abbildung der eindeutige Fixpunkt angenähert wird, sofern die PICARD-Iteration kontrahiert. Daß dies für kleine Zeiten und unter bestimmten Bedingungen an f der Fall ist, zeigt der Satz von PICARD-LINDELÖF. Die relevante Bedingung an f lautet wie folgt:

DEFINITION 2.9 (LIPSCHITZ-Stetigkeit). Sei $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Dann heißt f auf $\tilde{\Omega}$ LIPSCHITZ-stetig bezüglich x , wenn es ein $L \geq 0$ gibt mit

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall (t, x), (t, y) \in \tilde{\Omega}.$$

Ein solches L heißt LIPSCHITZ-Konstante für f .

Offensichtlich ist eine LIPSCHITZ-stetige Funktion a fortiori stetig in der Variablen x (wähle $\delta = \frac{\epsilon}{L}$).

BEISPIEL 2.10. Jede stetige Funktion $f : [t^0, T] \times \overline{B_r(x^0)} \rightarrow \mathbb{R}^m$, die bezüglich x stetig partiell differenzierbar ist, ist LIPSCHITZ-stetig bezüglich x . Es gilt nämlich nach dem höherdimensionalen Mittelwertsatz [3, Satz 7.12]:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \int_0^1 |D_x f(x + s(y - x))| ds |x - y| \leq L|x - y|$$

für $L = \|D_x f\|_\infty = \max\{|D_x f(s, z)| : (s, z) \in [t^0, T] \times \overline{B_r(x^0)}\}$.

BEISPIEL 2.11. Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig auf $[0, 1]$: es gibt nämlich nach Mittelwertsatz zu jedem $x \in (0, 1]$ ein $\xi_x \in (0, x)$, sodaß

$$|f(x) - f(0)| = |f'(\xi_x)||x - 0|,$$

aber $f'(\xi_x) = \frac{1}{2\sqrt{\xi_x}}$, was für $x \rightarrow 0$ gegen unendlich strebt.

SATZ 2.12 (PICARD-LINDELÖF³). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m}$ offen, $(t^0, x^0) \in \Omega$, und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und in einer Umgebung von (t^0, x^0) LIPSCHITZ-stetig bezüglich x . Dann existiert ein $\tau > t^0$ und genau eine Lösung $x : [t^0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t^0) = x^0.$$

BEWEIS. *Schritt 1.* Sei $[t^0, T] \times \overline{B_r(x^0)} \subset \Omega$ eine Menge, auf der f LIPSCHITZ-stetig ist mit LIPSCHITZ-Konstanter L , und sei wie zuvor M das Maximum von $|f|$ auf dieser (kompakten) Menge. Wir setzen

$$\tau := \min \left\{ T, t^0 + \frac{r}{M}, t^0 + \frac{1}{2L} \right\}. \quad (2.9)$$

Sei X der Raum der stetigen Funktionen $[t^0, \tau] \rightarrow \overline{B_r(x^0)}$ mit $x(t^0) = x^0$, dann ist X zusammen mit der Supremumsnorm nach Satz 2.1 ein vollständiger metrischer Raum⁴. Die Abbildung $P : X \rightarrow X$,

$$P(x)(t) := x^0 + \int_{t^0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{für } t \in [t^0, \tau],$$

ist wohldefiniert und bildet tatsächlich nach X ab: Die Stetigkeit (sogar Differenzierbarkeit) von $P(x)$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; es gilt $P(x)(t^0) = x^0$; und für $t \in [t^0, \tau]$ ist

$$|P(x)(t) - x^0| \leq \int_{t^0}^t |f(s, x(s))| ds \leq (\tau - t^0)M \leq r$$

nach Wahl von τ .

Schritt 2. Wir zeigen, daß $P : X \rightarrow X$ eine Kontraktion ist. In der Tat, für alle $x, y \in X$ und alle $t \in [t^0, \tau]$ gilt wegen der LIPSCHITZ-Bedingung

$$|P(x)(t) - P(y)(t)| \leq \int_{t^0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \leq L(\tau - t^0) \|x - y\|_\infty < \frac{1}{2} \|x - y\|_\infty$$

nach Wahl von τ , and damit ist P eine Kontraktion. Nach dem BANACHschen Fixpunktsatz existiert also ein eindeutiger Fixpunkt, d.h. eine Funktion $\bar{x} \in X$ mit

$$\bar{x}(t) = P(\bar{x})(t) = x^0 + \int_{t^0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds \quad \forall t \in [t^0, \tau].$$

Nach Proposition 2.7 ist dies aber äquivalent dazu, daß \bar{x} das gegebene Anfangswertproblem löst. □

³von 1890; der Satz wird manchmal (vor allem im englischsprachigen Raum) nach CAUCHY und LIPSCHITZ benannt.

⁴Man beachte dazu, daß die Bedingungen $x(t^0) = x^0$ und $\|x - x^0\|_\infty \leq r$ im gleichmäßigen Limes erhalten bleiben.

BEMERKUNG 2.13. Der Satz von PEANO gilt unter schwächeren Voraussetzungen (Stetigkeit von f genügt), liefert aber auch ein schwächeres Resultat (nur Existenz, keine Eindeutigkeit) als der Satz von PICARD-LINDELÖF. In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die LIPSCHITZ-Bedingung meist erfüllt, sodaß man den Satz von PICARD-LINDELÖF verwenden kann. Gleichwohl ist der Satz von PEANO instruktiv, weil sein Beweis zeigt, daß das EULERSche Polygonzugverfahren (bis auf eine Teilfolge) gleichmäßig gegen eine Lösung konvergiert.

2.5. Das maximale Existenzintervall

Die im letzten Abschnitt besprochenen Existenzsätze garantieren eine (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems bis zu irgendeiner Zeit $\tau > t^0$. Die Zeitspanne $\tau - t^0$ könnte allerdings sehr kurz sein, und unsere Sätze sagen ja in keiner Weise aus, daß die Lösung nicht doch über einen längeren Zeitraum existiert.

Daß die Sätze von PEANO und PICARD-LINDELÖF nicht den optimalen Zeitraum der Existenz angeben, kann man folgendermaßen erkennen: Sei $\tau > t^0$ die Zeit aus dem Satz von, sagen wir, PICARD-LINDELÖF, sodaß $x : [t^0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ die eindeutige Lösung von $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$ auf dem Intervall $[t^0, \tau]$ ist. Da $(\tau, x(\tau)) \in \Omega$, können wir das neue Anfangswertproblem $y' = f(t, y)$, $y(\tau) = x(\tau)$ betrachten und erhalten aus PICARD-LINDELÖF eine Zeit $\tau^1 > \tau$ und eine Lösung $y : [\tau, \tau^1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ des Problems auf $[\tau, \tau^1]$. Es ist leicht einzusehen, daß

$$z(t) := \begin{cases} x(t) & t^0 \leq t \leq \tau \\ y(t) & \tau \leq t \leq \tau^1 \end{cases} \quad (2.10)$$

die eindeutig bestimmte Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$ auf dem nun *vergrößerten* Intervall $[t^0, \tau^1]$ ist. In dieser Weise haben wir also unser Existenzintervall quasi „kostenlos“ erweitert. Und entsprechend können wir weiterargumentieren: Lösen wir nun das Anfangswertproblem mit $x(\tau^1) = z(\tau^1)$ (mit z aus (2.10)), so erhalten wir eine Fortsetzung der Lösung auf ein noch größeres Intervall $[t^0, \tau^2]$ mit $\tau^2 > \tau^1$, und immer so fort. Wir haben damit eine streng monoton wachsende Folge von Zeiten $\tau^1 < \tau^2 < \tau^3 \dots$, bis zu denen die Lösung existiert.

Folgt daraus nun, daß die Lösung auf ganz $[t^0, \infty)$ fortsetzbar ist? Nein, denn die Folge $(\tau^k)_{k \in \mathbb{N}}$ könnte gegen ein endliches $T < \infty$ konvergieren. Daß dies tatsächlich vorkommen kann, zeigt bereits Beispiel 1.3.

DEFINITION 2.14 (maximales Existenzintervall). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m}$ offen, $(t^0, x^0) \in \Omega$, und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und auf jeder kompakten Teilmenge von Ω LIPSCHITZ-stetig bezüglich x . Seien

$$T^+ := \sup\{\tau > t^0 : \text{Es existiert auf } [t^0, \tau] \text{ eine Lösung von } x' = f(t, x), x(t^0) = x^0\}$$

$$T^- := \inf\{\tau < t^0 : \text{Es existiert auf } [\tau, t^0] \text{ eine Lösung von } x' = f(t, x), x(t^0) = x^0\}.$$

Dann heißt $(T^-; T^+)$ das *maximale Existenzintervall* des Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$.

BEMERKUNG 2.15. (1) Das Supremum bzw. Infimum in dieser Definition wird nicht über die leere Menge genommen: Für T^+ folgt dies sofort aus PICARD-LINDELÖF (oder auch PEANO) und für T^- ebenso, sofern man die *Zeitumkehrung* des Anfangswertproblems betrachtet, nämlich das Problem

$$y'(t) = -f(2t^0 - t, y(t)), \quad y(t^0) = x^0.$$

Nach unserer Existenztheorie hat dieses Anfangswertproblem nämlich eine Lösung bis zu einer Zeit $\sigma > t^0$, und man rechnet leicht nach, daß dann $x(t) := y(2t^0 - t)$ auf dem Intervall $[\tau, t^0]$ das ursprüngliche Problem $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$ erfüllt mit $\tau := 2t^0 - \sigma$.

- (2) Es ist durchaus möglich, daß $T^- = -\infty$ oder $T^+ = +\infty$. (Siehe etwa Beispiele 1.2, 1.4, etc.)
- (3) Auf dem maximalen Existenzintervall ist die Lösung eindeutig bestimmt: Seien nämlich x und \tilde{x} zwei Lösungen von $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = \tilde{x}(t^0)$ auf (T^-, T^+) . Sei

$$\tau := \sup\{s \in (t^0, T^+) : x(s) = \tilde{x}(s)\};$$

nach dem Eindeutigkeitssteil des Satzes von PICARD-LINDELÖF wird das Infimum über eine nichtleere Menge gebildet. Angenommen, $\tau < T^+$. Da x und \tilde{x} in $[t^0, T^+)$ stetig sind, gilt dann auch $x(\tau) = \tilde{x}(\tau)$, also lösen beide Funktionen das gleiche Anfangswertproblem zum Anfangszeitpunkt τ . Nach PICARD-LINDELÖF ist die Lösung dieses Problems bis zu einer Zeit $\tau^1 \in (\tau, T^+)$ eindeutig bestimmt, sodaß $x = \tilde{x}$ in (τ, τ^1) , im Widerspruch zur Definition von τ . Also ist $\tau = T^+$. Analog (mit Zeitumkehrung) zeigt man $x = \tilde{x}$ auf $(T^-, t^0]$.

- (4) Das maximale Existenzintervall ist als das *offene* Intervall (T^-, T^+) definiert. Es stünde im Widerspruch zur Definition von T^\pm , wenn die Lösung auf ein größeres offenes Intervall fortsetzbar wäre. Wie aber sieht es mit den abgeschlossenen bzw. halboffenen Intervallen $[T^-, T^+]$, $(T^-, T^+]$, $[T^-, T^+)$ aus? Auch auf ein solches Intervall kann die Lösung nicht fortgesetzt werden, denn angenommen, x wäre eine Lösung auf $(T^-, T^+]$; dann würde der Satz von PICARD-LINDELÖF eine Lösung des Problems $y' = f(t, y)$, $y(T^+) = x(T^+)$ gestatten, mit dem x bis zu einem Zeitpunkt nach T^+ fortgesetzt würde, im Widerspruch zur Definition von T^+ . Analog für T^- .

Als nächstes untersuchen wir die Frage, wie es zugehen kann, daß T^\pm endlich ist. Es gibt dafür nur zwei Möglichkeiten:

PROPOSITION 2.16. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m}$ offen, $(t^0, x^0) \in \Omega$, und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und auf jeder kompakten Teilmenge von Ω LIPSCHITZ-stetig bezüglich x . Sei x die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$, mit maximalem Existenzintervall (T^-, T^+) . Ist $T^+ < +\infty$, so gilt (mindestens) eine der beiden folgenden Aussagen:*

- (1) $\liminf_{t \nearrow T^+} \text{dist}((t, x(t)); \partial\Omega) = 0$;
- (2) $\lim_{t \nearrow T^+} |x(t)| = +\infty$.

Hierbei haben wir für ein $y \in \mathbb{R}^{1+m}$ und eine Menge $U \subset \mathbb{R}^{1+m}$ geschrieben

$$\text{dist}(y; U) := \inf\{|y - u| : u \in U\}.$$

BEWEIS. *Schritt 1.* Angenommen $T^+ < \infty$, aber beide Aussagen trafen nicht zu. Dann gäbe es eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $t_k \nearrow T^+$ sowie $\delta > 0$, $M > 0$, sodaß

$$|x(t_k)| < M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

und

$$B_\delta(t_k, x(t_k)) \subset \Omega \quad \text{in } \mathbb{R}^{1+m}, \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Wegen (2.11) ist die Folge $(t_k, x(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^{1+m} beschränkt, und es existiert nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS eine konvergente Teilfolge, die wir (in etwas mißbräuchlicher Notation) immer noch mit $(t_k, x(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ bezeichnen. Für diese Folge gilt

$$t_k \rightarrow T^+, \quad x(t_k) \rightarrow \bar{x}, \quad (T^+, \bar{x}) \in \Omega, \tag{2.13}$$

wobei wir für die letzte Aussage die Annahme (2.12) verwendet haben (wir brauchen sie, da Ω offen ist!).

Schritt 2. Wegen (2.13) existiert $r > 0$, sodaß $[T^+ - r, T^+ + r] \times \overline{B_r(\bar{x})} \subset \Omega$. Wir dürfen annehmen, daß $(t_k, x(t_k))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ in dieser Menge liegt (sonst verwerfen wir die

ersten Folgenglieder). Sei L eine LIPSCHITZ-Konstante für f und Γ das Maximum von f auf dieser kompakten Menge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\tau_k := \min \left\{ T^+ + r, t_k + \frac{r}{\Gamma}, t_k + \frac{1}{2L} \right\}.$$

Nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF (siehe insbesondere (2.9)) existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(t, y)$, $y(t_k) = x(t_k)$ auf dem Zeitintervall $[t_k, \tau_k]$.

Da $t_k \nearrow T^+$, existiert hinreichend großes k , sodaß $\tau_k > T^+$, sodaß wir die Lösung auf ein Zeitintervall jenseits von T^+ erweitert hätten. Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von T^+ . \square

BEMERKUNG 2.17. (1) Eine analoge Aussage gilt für T^- .

(2) Die Proposition besagt: Wenn die Existenzzeit endlich ist, kommt die Lösung dem Rand des Definitionsbereichs von f beliebig nahe, oder die Lösung ist in der Zeit unbeschränkt. Ein Beispiel für dieses Phänomen ist 1.3, für jenes 1.5. In Beispiel 1.5 ist nämlich der Definitionsbereich der rechten Seite $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, und das Existenzintervall der Lösung $x(t) = \frac{t^2}{4}$ ist $(0, +\infty)$. (Beachte, daß $\frac{t^2}{4}$ die Gleichung für $t < 0$ nicht löst!) Für $t \searrow 0$ konvergiert die Lösung gegen $x = 0$, was auf dem Rand des Definitionsbereichs liegt.

(3) Das Szenario $\lim_{t \nearrow T^+} |x(t)| = \infty$ wird als *blow-up* bezeichnet (also als „Explosion“). Die Frage, ob für eine gegebene Differentialgleichung ein blow-up passieren kann, kann hochgradig nichttrivial sein⁵.

Nun, da wir wissen, in welcher Weise eine Lösung nur für endliche Zeit besteht, wollen wir ein hinreichendes Kriterium dafür angeben, daß $T^+ = \infty$. Zunächst benötigen wir dafür ein Resultat, das in der Analysis vielfältige Anwendungen genießt:

SATZ 2.18 (Lemma von GRÖNWALL). Sei $\phi : [t^1, t^2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es gebe $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, sodaß

$$\phi(t) \leq a + b \int_{t^1}^t \phi(s) ds$$

für alle $t \in [t^1, t^2]$. Dann folgt

$$\phi(t) \leq a e^{b(t-t^1)}$$

für alle $t \in [t^1, t^2]$.

BEWEIS. Betrachte die stetig differenzierbare Funktion $\bar{\phi}$ mit

$$\bar{\phi}(t) = a + b \int_{t^1}^t \phi(s) ds.$$

Nach Voraussetzung haben wir $\phi \leq \bar{\phi}$, also ergibt Differentiation von $\bar{\phi}$

$$\bar{\phi}' = b\phi \leq b\bar{\phi}, \quad \bar{\phi}(t^1) = a.$$

Sei nun $\psi(t) := a e^{b(t-t^1)}$, so ist

$$\psi' = b\psi, \quad \psi(t^1) = a.$$

Für $\zeta := \bar{\phi} - \psi$ folgt daher

$$\zeta' \leq b\zeta, \quad \zeta(t^1) = 0$$

⁵Eines der sieben Millenniumsprobleme, für die das Clay Mathematics Institute im Jahr 2000 ein Preisgeld von je einer Million Dollar ausgelobt hat, besteht in der bisher ungeklärten Möglichkeit des blow-up für die sogenannten NAVIER-STOKES-Gleichungen, bei denen es sich allerdings um ein System partieller Differentialgleichungen handelt.

und somit

$$0 \geq e^{-b(t-t^1)} \zeta' - b e^{-b(t-t^1)} \zeta = \frac{d}{dt} \left[e^{-b(t-t^1)} \zeta \right].$$

Da aber die Funktion $t \mapsto e^{-b(t-t^1)} \zeta$ bei t^1 den Wert Null annimmt und überall nichtpositive Ableitung besitzt, folgt $\zeta \leq 0$ und damit $\phi \leq \psi$ auf ganz $[t^1, t^2]$, was zu beweisen war. \square

SATZ 2.19 (Globale Existenz bei linearer Beschränktheit). Sei $f : \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und auf jeder kompakten Menge bzgl. x LIPSCHITZ-stetig. Es gebe eine Funktion $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dergestalt, daß C auf jedem kompakten Intervall beschränkt ist, und sodaß

$$|f(t, x)| \leq C(t)(1 + |x|)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Seien $t^0 \in \mathbb{R}$ und $x^0 \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Dann hat das Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$ das maximale Existenzintervall $(-\infty, \infty)$.

BEWEIS. Wir zeigen nur $T^+ = +\infty$, da die Aussage $T^- = -\infty$ durch Zeitumkehr analog bewiesen wird.

Nach Proposition 2.16 genügt es zu zeigen, daß die eindeutige Lösung x auf jedem Intervall $[t^0, \tau)$, auf dem sie existiert, beschränkt ist. (Der Fall, daß sich die Lösung dem Rand des Definitionsbereichs von f annähert, kann nicht eintreten, da wir $\Omega = \mathbb{R}^{1+m}$ angenommen haben.) Sei $C' := \sup_{t \in [t^0, \tau]} C(t)$. Nach Voraussetzung haben wir dann für alle $t \in [t^0, \tau)$

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left| x^0 + \int_{t^0}^t f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq |x^0| + \int_{t^0}^t |f(s, x(s))| ds \\ &\leq |x^0| + C'(\tau - t^0) + C' \int_{t^0}^t |x(s)| ds. \end{aligned}$$

Aus dem GRÖNWALL-Lemma (mit $a = |x^0| + C'(\tau - t^0)$, $b = C'$ und $\phi = |x|$) folgt nun

$$|x(t)| \leq (|x^0| + C'(\tau - t^0)) e^{C'(t-t^0)},$$

was auf dem Intervall $[t^0, \tau)$ in der Tat beschränkt ist. \square

2.6. Stetige Abhängigkeit von den Daten

Erinnern wir uns an das Epidemiemodell 1.13. In der Realität wird man die wichtigen Parameter β und γ , aber auch die gegenwärtige Zahl $I(0)$ der Infizierten nicht genau bestimmen, sondern nur ungefähr schätzen können. Ähnlich verhält es sich mit der genauen Position und Härte eines Federpendels (Beispiel 1.4) und im Grunde mit allen realen Anwendungen: Der Zustand und die Parameter eines Systems sind nie völlig exakt meßbar. Damit ODEs trotzdem eine brauchbare Analyse der realen Situation liefern können, müssen wir folgendes Prinzip sicherstellen: Kleine Ungenauigkeiten in den Daten (also Anfangsdaten und Parameter) führen auch nur zu kleinen Abweichungen in der Lösung. Mathematisch ist dieses Prinzip nichts anderes als die Stetigkeit.

Folgender Satz zeigt, ob er sich auch recht sperrig lesen mag, genau dies:

SATZ 2.20 (Stetige Abhängigkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m}$ offen, $(t^0, x^0) \in \Omega$, und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und auf jeder kompakten Teilmenge von Ω LIPSCHITZ-stetig bezüglich x . Sei x die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(t, x)$, $x(t^0) = x^0$, mit maximalem Existenzintervall (T^-, T^+) .

Sei $(x_k^0)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ eine Folge mit $x_k^0 \rightarrow x^0$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, die auf jeder kompakten Teilmenge von Ω LIPSCHITZ sind und dort gleichmäßig gegen f konvergieren. Seien x_k die Lösungen des Anfangswertproblems $x_k' = f_k(t, x_k(t))$,

$x_k(t^0) = x_k^0$ mit maximalen Existenzintervallen (T_k^-, T_k^+) . Sei schließlich $[\tau^-, \tau^+] \subset (T^-, T^+)$ beliebig. Dann gilt:

- (1) x_k ist auf $[\tau^-, \tau^+]$ definiert für hinreichend große k ;
- (2) x_k konvergiert auf $[\tau^-, \tau^+]$ gleichmäßig gegen x .

Man beachte, daß (2) sinnvoll ist, da x_k wegen (1) auf $[\tau^-, \tau^+]$ für hinreichend großes k definiert ist.

BEWEIS. *Schritt 1.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen $t^0 \in (\tau^-, \tau^+)$. Da x stetig ist, hat der Graph $\{(t, x(t)) : t \in [\tau^-, \tau^+]\}$ positiven Abstand zu $\partial\Omega$. Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ist also der kompakte „ ϵ -Schlauch“ um diesen Graphen noch in Ω enthalten, d.h.

$$\Gamma_\epsilon := \{(t, y) \in \mathbb{R}^{1+m} : t \in [\tau^-, \tau^+], |y - x(t)| \leq \epsilon\} \subset \Omega.$$

Beachte, daß Γ_ϵ kompakt ist. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig und hinreichend klein, damit $\Gamma_\epsilon \subset \Omega$.

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$t_k^* := \sup\{t \in (t^0, T_k^+) : (s, x_k(s)) \in \Gamma_\epsilon \quad \forall s \in (t^0, t)\}.$$

Es ist also t_k^* der Zeitpunkt, zu dem der Graph von x_k die Menge Γ_ϵ zuerst verläßt (falls nötig, können wir durch Weglassen endlich vieler Folgenglieder sicherstellen, daß $(t^0, x_k^0) \in \Gamma_\epsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$). Wir sind fertig, sobald wir zeigen können, daß $t_k^* = \tau^+$ für ausreichend großes $k \in \mathbb{N}$ (die analoge Aussage für τ^- folgt wie üblich durch Zeitumkehrung). Zunächst können wir jedenfalls festhalten, daß $t_k^* > t^0$, da x_k stetig ist.

Schritt 2. Wir schätzen dazu wie folgt ab: Sei L eine LIPSCHITZ-Konstante für f auf Γ_ϵ und

$$\eta_k := \sup\{f(s, x) - f_k(s, x) : (s, x) \in \Gamma_\epsilon\} < \infty.$$

Beachte, daß nach Voraussetzung $\eta_k \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$. Dann gilt für $t \in (t^0, t_k^*)$

$$\begin{aligned} |x(t) - x_k(t)| &= \left| x^0 - x_k^0 + \int_{t^0}^t (f(s, x(s)) - f_k(s, x_k(s))) ds \right| \\ &\leq |x^0 - x_k^0| + \int_{t^0}^t |f(s, x(s)) - f_k(s, x_k(s))| ds \\ &\leq |x^0 - x_k^0| + \int_{t^0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_k(s))| ds \\ &\quad + \int_{t^0}^t |f(s, x_k(s)) - f_k(s, x_k(s))| ds \\ &\leq |x^0 - x_k^0| + L \int_{t^0}^t |x(s) - x_k(s)| ds + \eta_k(\tau^+ - t^0). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$a_k := |x^0 - x_k^0| + \eta_k(\tau^+ - t^0),$$

so gilt nach Voraussetzung $a_k \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$, und wir erhalten aus der GRÖNWALL-Ungleichung (mit $\phi = |x - x_k|$)

$$|x(t) - x_k(t)| \leq a_k e^{L(t-t^0)} \leq a_k e^{L(\tau^+ - t^0)}$$

für alle $t \in (t^0, t_k^*)$.

Schritt 3. Wir können daher k so groß wählen, daß $|x(t) - x_k(t)| < \frac{\epsilon}{2}$, insbesondere also $x_k(t) \in \Gamma_\epsilon$, für alle $t \in (t^0, t_k^*)$. Da Γ_ϵ beschränkt ist und positiven Abstand zu $\partial\Omega$ besitzt, folgt aus Proposition 2.16, daß $t_k^* < T_k^+$. Aus $|x(t) - x_k(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ folgt andererseits $|x(t_k^*) - x_k(t_k^*)| < \epsilon$, also kann der Graph von x_k die Menge Γ_ϵ nur nach rechts verlassen, und dies bedeutet gerade $t_k^* = \tau^+$, was zu beweisen war. \square

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten nun *lineare* Gleichungen bzw. Systeme von Gleichungen, für die die rechte Seite f linear von x (aber nicht zwingend linear von t) abhängt. Wir behandeln dabei hauptsächlich Gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten. Zunächst soll es aber allgemein um Gleichungen der Form

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t), \quad (3.1)$$

gehen, wobei $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$ die gesuchte Lösung, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ eine gegebene und stetig von t abhängige Koeffizientenmatrix, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$ eine stetige Funktion von t ist. Man nennt g die *Inhomogenität*. Die Gleichung

$$x' = Ax \quad (3.2)$$

wird als (die zu (3.1) gehörige) *homogene Gleichung* bezeichnet.

Nach Satz 2.19 existiert zu (3.1) eine (für gegebenes Anfangsdatum eindeutige) Lösung auf ganz \mathbb{R} .

Zum Beispiel können wir die erzwungene Schwingungsgleichung (1.7) mit $y := x'$ in der Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{A}{m} \exp(i\omega t) \end{pmatrix}$$

schreiben; das zugehörige homogene System ist dann die gedämpfte Schwingungsgleichung ohne externe Kraft.

Das folgende Resultat ist einfach, aber erhellend:

SATZ 3.1 (algebraische Struktur des Lösungsraums). Die Menge \mathcal{L}_{hom} der Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$ von (3.2) ist ein m -dimensionaler Untervektorraum des Raums der stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$. Ist $x_{in} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$ (irgend) eine Lösung von (3.1), so ist die Lösungsmenge \mathcal{L}_{in} von (3.1) ein affiner Unterraum (der Dimension m), nämlich

$$\mathcal{L}_{in} = x_{in} + \mathcal{L}_{hom} = \{x_{in} + x_{hom} : x_{hom} \in \mathcal{L}_{hom}\}.$$

BEWEIS. Es ist klar, daß mit x, y auch $x + y$ eine Lösung des homogenen Problems ist, denn $(x + y)' = x' + y' = Ax + Ay = A(x + y)$ (Superpositionsprinzip). Ebenso ist mit x auch λx eine Lösung für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Also ist \mathcal{L}_{hom} ein Vektorraum.

Sei $x_{in} \in \mathcal{L}_{in}$ beliebig. Wir müssen zeigen, daß für jede weitere Lösung y_{in} gilt $x_{in} - y_{in} \in \mathcal{L}_{hom}$. Aber dies ist der Fall, denn

$$(x_{in} - y_{in})' = x'_{in} - y'_{in} = Ax_{in} + g - Ay_{in} - g = A(x_{in} - y_{in}).$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Dimension von \mathcal{L}_{hom} gleich m ist. Sei dazu (e_1, \dots, e_m) eine Basis von \mathbb{R}^m , und seien x_1, \dots, x_m jeweils die Lösungen von $x' = Ax$ mit Anfangswert e_1, \dots, e_m . Dann sind die Funktionen x_1, \dots, x_m linear unabhängig, denn aus

$$\lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_m x_m(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

folgt insonderheit

$$0 = \lambda_1 x_1(0) + \dots + \lambda_m x_m(0) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m,$$

also $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der e_k . Damit ist gezeigt, daß der Lösungsraum *mindestens* m -dimensional ist.

Ist nun x irgendeine Lösung des homogenen Problems, so kann man $x(0)$ schreiben als Linearkombination der e_k ; dann aber ist x genau gleich der entsprechenden Linearkombination der x_k , also spannen x_1, \dots, x_m den gesamten Raum \mathcal{L}_{hom} auf. Es folgt $\dim \mathcal{L}_{hom} = m$. \square

BEMERKUNG 3.2. In diesem Kontext werden in vielen Texten die Begriffe *Fundamentalsystem*, *Fundamentalmatrix*, *WROŃSKI-Determinante* eingeführt. Da ich diese Konzepte niemals als in irgendeiner Form nützlich oder erhellend empfunden habe und wir sie im Fortgang dieser Vorlesung nicht benötigen, verzichte ich auf ihre Besprechung. Falls Sie diese einfachen Begriffe doch einmal brauchen sollten, können Sie sie jederzeit auf Wikipedia oder in Ihrem favorisierten ODE-Lehrbuch nachschlagen.

Wir setzen von nun an stets voraus, daß $A \neq A(t)$ eine konstante Matrix ist.

3.1. Das homogene Problem

Bei der Untersuchung von Schwingungsgleichungen haben wir gesehen, daß die Exponentialfunktion eine wichtige Rolle spielt. Formal können wir ja, in Analogie zum skalaren Fall ($m = 1$), die Lösung der homogenen Gleichung $x' = Ax$ mit Anfangsdatum $x^0 \in \mathbb{R}^m$ als $\exp((t - t^0)A)x^0$ angeben. Aber wie ist die Exponentialfunktion einer Matrix definiert?

Dazu erinnern wir uns an die Matrixnorm

$$|A| := \sup\{|Ax| : |x| \leq 1\}.$$

Mit dieser Norm ist $\mathbb{C}^{m \times m}$ ein BANACHraum und sogar eine BANACHalgebra, das heißt

$$|AB| \leq |A||B| \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Dies folgt wegen

$$|AB| = \sup\{|ABx| : |x| \leq 1\} \leq \sup\{|Ay| : |y| \leq |B|\} = |B| \sup\{|Ay| : |y| \leq 1\} = |A||B|.$$

Insbesondere gilt für Potenzen

$$|A^k| \leq |A|^k. \tag{3.3}$$

Dies ist der Schlüssel zu folgender Definition:

PROPOSITION 3.3. *Für jedes $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ist die Exponentialreihe*

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

absolut konvergent in $\mathbb{C}^{m \times m}$.

BEWEIS. Dies folgt sofort aus (3.3), dem Majorantenkriterium, und der Konvergenz der reellen Exponentialreihe $\exp(|A|)$. \square

Man erinnere sich daran (z.B. aus der Maßtheorie), daß in einem BANACHraum die absolute Konvergenz einer Reihe bereits ihre Konvergenz impliziert.

BEISPIEL 3.4. Für die ungedämpfte harmonische Oszillatorgleichung (1.4) und $\omega_0 = 1$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und man rechnet leicht nach, daß

$$\begin{aligned} A^{4j+1} &= A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & A^{4j+2} &= A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ A^{4j+3} &= -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & A^{4j} &= I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mit den Reihenentwicklungen $\sin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ und $\cos(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$ ergibt sich

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

und für die Anfangswerte $x(0) = 1$ und $x'(0) = 0$ erhalten wir

$$\exp(tA)x^0 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix},$$

also insbesondere $x(t) = \cos(t)$, in Übereinstimmung mit unserer Rechnung in Beispiel 1.9.

Auch im allgemeinen erhalten wir durch Exponentiation die Lösung unseres Gleichungssystems:

SATZ 3.5. Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, dann ist $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x(t) = \exp((t - t^0)A)x^0$, die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = Ax, \quad x(t^0) = x^0.$$

BEWEIS. Sei $k \in \{1, \dots, m\}$, dann ist nach Definition der Exponentialreihe

$$[\exp((t - t^0)A)x^0]_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t - t^0)^j}{j!} \sum_{l=1}^m (A^j)_{kl} x_l^0,$$

und dies ist eine auf ganz \mathbb{R} absolut konvergente Potenzreihe in t wiederum nach dem Majorantenkriterium (mit Majorante $\sum_{j=0}^{\infty} |x^0| \frac{(t - t^0)^j |A|^j}{j!}$). Daher dürfen wir sie gliedweise differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\exp((t - t^0)A)x^0]_k &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t - t^0)^{j-1}}{(j-1)!} \sum_{l=1}^m (AA^{j-1})_{kl} x_l^0 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t - t^0)^{j-1}}{(j-1)!} \sum_{l,r=1}^m A_{kr} (A^{j-1})_{rl} x_l^0 \\ &= [A \exp((t - t^0)A)x^0]_k, \end{aligned}$$

und da dies für jede Komponente k gilt, folgt $x' = Ax$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung ist offensichtlich ebenfalls erfüllt. Die Eindeutigkeit folgt aus der allgemeinen Theorie aus Kapitel 2. □

3.2. Das inhomogene Problem

Wir kehren zurück zum inhomogenen Problem (3.1), also zum System $x' = Ax + g$. Wir ignorieren zunächst die Anfangswerte und suchen nur *irgendeine* Lösung dieser Differentialgleichung. Dazu multiplizieren wir die Gleichung von links mit $\exp(-tA)$:

$$\exp(-tA)x' - \exp(-tA)Ax = \exp(-tA)g.$$

Wir bemerken, daß die Matrix A mit der Matrix $\exp(-tA)$ kommutiert, denn jedes Glied $(-t)^j \frac{A^j}{j!}$ der Exponentialreihe kommutiert mit A . Daher folgt

$$\exp(-tA)x' - A \exp(-tA)x = \exp(-tA)g.$$

Im Beweis von Satz 3.5 haben wir aber verifiziert, daß für eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ gilt $\frac{d}{dt} \exp(tB) = B \exp(tB)$.¹ Die Wahl $B = -A$ und die Produktregel liefern

$$(\exp(-tA)x)' = \exp(-tA)g$$

¹Achtung: Im allgemeinen gilt *nicht* $\frac{d}{dt} \exp(B(t)) = B'(t) \exp(B(t))$. Dies ist nur dann der Fall, wenn für alle t die Matrix $B'(t)$ mit $B(t)$ kommutiert.

und daher (falls $x(t^0) = 0$)

$$\exp(-tA)x(t) = \int_{t^0}^t \exp(-sA)g(s)ds. \quad (3.4)$$

Um schließlich nach x aufzulösen, benötigen wir noch

PROPOSITION 3.6. *Seien $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ kommutierende Matrizen, d.h. $AB = BA$. Dann gilt die Funktionalgleichung*

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B).$$

Insbesondere folgt für $B = -A$ die Invertierbarkeit von $\exp(A)$, und es gilt

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

Kommutieren die beiden Matrizen nicht, so ist der Ausdruck für $\exp(A) \exp(B)$ wesentlich komplizierter; er ist Gegenstand der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel.

BEWEIS. Der Beweis geht wie in dem aus der Analysis bekannten Fall der skalaren Exponentialfunktion: Nach dem Satz über das CAUCHY-Produkt gilt für zwei absolut konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} B_l$:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} B_l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n A_j B_{n-j},$$

und ein kurzer Blick in den Beweis bestätigt, daß dies allgemein für Reihen in BANACHalgebren (wie $\mathbb{C}^{m \times m}$) gilt. Daher ist

$$\begin{aligned} \exp(A) \exp(B) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{A^j B^{n-j}}{j!(n-j)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A^j B^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \exp(A+B). \end{aligned}$$

Hier haben wir im vorletzten Schritt die binomische Formel $(A+B)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A^j B^{n-j}$ verwendet, die allerdings für Matrizen nur dann gilt, wenn A und B kommutieren.² \square

Mit dieser Erkenntnis können wir endlich eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung angeben: Wir brauchen dazu lediglich in (3.4) die Matrix $\exp(-tA)$ auf die andere Seite zu bringen.

SATZ 3.7 (DUHAMEL-Prinzip). Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$ stetig. Dann ist

$$x(t) = \exp(tA) \int_{t^0}^t \exp(-sA)g(s)ds$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung $x' = Ax + g$.

KOROLLAR 3.8 (Lösung des Anfangswertproblems). Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = Ax + g, \quad x(t^0) = x^0 \quad (3.5)$$

lautet

$$x(t) = \exp((t-t^0)A)x^0 + \exp(tA) \int_{t^0}^t \exp(-sA)g(s)ds.$$

²Genauer gesagt gilt die Aussage des binomische Lehrsatzes für kommutierende Elemente A und B eines beliebigen Ringes.

BEWEIS. Nach Satz 3.1 ist jede Lösung des inhomogenen Problems die Summe aus der inhomogenen Lösung $x_{in}(t) = \exp(tA) \int_{t_0}^t \exp(-sA)g(s)ds$ und einer homogenen Lösung. Nach Satz 3.5 ist die angegebene Funktion also tatsächlich eine Lösung von $x' = Ax + g$, und offensichtlich ist auch die Anfangsbedingung erfüllt. \square

3.3. Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion

Durch die DUHAMEL-Formel ist die Lösung linearer ODE auf die Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion zurückgeführt. Diese Berechnung hinwiederum kann auf Methoden der linearen Algebra reduziert werden. Wir beginnen mit dem einfachen Falle, daß die Matrix A diagonalisierbar ist.

3.3.1. Funktionalkalkül für diagonalisierbare Matrizen. Wir müssen uns in diesem Falle nicht auf die Exponentialfunktion beschränken, sondern können eine beliebige Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten. Wir fragen uns, welche Bedeutung der Ausdruck $f(A)$ haben kann, wenn $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ diagonalisierbar ist (über \mathbb{C}); zur Erinnerung: A heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{m \times m}$ gibt mit

$$A = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) S^{-1},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die m (nicht notwendig paarweise verschiedenen, womöglich aber komplexen) Eigenwerte von A sind und

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Dann definieren wir

$$f(A) := S \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_m)) S^{-1}.$$

Wenn wir $f = \exp$ setzen wollen, müssen wir verifizieren, daß in diesem Falle die eben gegebene Definition mit der früheren übereinstimmt.

LEMMA 3.9. Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ diagonalisierbar mit

$$A = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) S^{-1},$$

und definiere die Exponentialfunktion wie in Proposition 3.3 durch $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. Dann gilt

$$\exp(A) = S \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m}) S^{-1}.$$

BEWEIS. Schreibe $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Unter Beachtung von $(SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$ ist dann

$$\exp(A) = \exp(SDS^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SD^kS^{-1}}{k!} = S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) S^{-1},$$

und die Behauptung folgt mit $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k)$, wie sich leicht mit Induktion nach k beweisen läßt. \square

Durch Diagonalisierung kann also die Matrix-Exponentialfunktion berechnet werden.

BEISPIEL 3.10. Betrachte erneut die harmonische Oszillorgleichung, für die $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Man findet (etwa mit einem Computeralgebrasystem)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

und für $t \in \mathbb{R}$ ist $e^{\pm it} = \cos(t) \pm i \sin(t)$, weshalb gilt

$$\exp(tA) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t - i \sin t & 0 \\ 0 & \cos t + i \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 3.4.

Man mag einwenden, diese Rechnung sei erheblich aufwendiger als die in 3.4. Letztere beruhte allerdings auf der Möglichkeit, alle Potenzen von A explizit hinzuschreiben, was meistens allerdings nicht möglich ist.

BEMERKUNG 3.11. Die Matrix $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ beschreibt eine Rotation in \mathbb{R}^2 um den Winkel $-t$. Man zeigt leicht, daß solche Rotationsmatrizen genau die speziellen orthogonalen Matrizen sind, also die orthogonalen Matrizen mit positiver Determinante. (Man nennt diese Menge $SO(2)$.) Andererseits ist die Menge der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ genau die Menge $\text{skew}(2)$ der reellen 2×2 -antisymmetrischen Matrizen. Unsere Rechnung (bzw. auch bereits die in Beispiel 3.4) zeigt also

$$SO(2) = \exp(\text{skew}(2)).$$

In der Theorie der LIE-Gruppen besagt dies, daß $\text{skew}(2)$ die zu $SO(2)$ gehörige LIE-Algebra ist. Man sagt auch, die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sei ein *infinitesimaler Generator* von $SO(2)$. Dies ist dadurch begründet, daß

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A;$$

die lineare Approximation der Rotation eines Vektors v um den Winkel $-t$ in der Nähe von $t = 0$ ist also gegeben durch $R(t)v \sim v + tAv$.

Diese Idee, eine (LIE-)Gruppe geometrischer Transformationen durch Übergang zur LIE-Algebra zu „lokalisieren“, ist von grundlegender Bedeutung in der Differentialgeometrie und der Teilchenphysik.

3.3.2. JORDANSche Normalform. Ist eine $m \times m$ -Matrix nicht diagonalisierbar, so kann man sie immerhin in die JORDANSche Normalform bringen, also in die Form

$$A = SJS^{-1} = S \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} S^{-1}$$

für eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und ein $k \leq m$, wobei die A_j sogenannte JORDANblöcke sind, also obere Dreiecksmatrizen der Form

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung aus dem Beweis von Lemma 3.9 zeigt, daß dann $\exp(A) = S \exp(J) S^{-1}$ ist. Das nächste Lemma zeigt, wie man eine Matrix in JORDAN-Normalform exponentiiert:

LEMMA 3.12. (1) *Für jede Blockdiagonalmatrix der Gestalt*

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\exp(J) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & & \\ & \exp(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(A_k) \end{pmatrix}.$$

(2) Für einen $d \times d$ -JORDANblock der Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\exp(tJ) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} \\ & & 1 & t & \cdots & \frac{t^{d-3}}{(d-3)!} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. (1) Wir führen Induktion nach der Anzahl k der Blöcke. Für $k = 1$ ist die Aussage trivial. Sei nun also

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \\ & & & & A_{k+1} \end{pmatrix},$$

so können wir J auch schreiben als

$$J = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix},$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B := A_{k+1}.$$

Ist nun $A = (A_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,d_1}$ und $B = (B_{\gamma\delta})_{\gamma,\delta=1,\dots,d_2}$, so erhalten wir für die $(d_1 + d_2) \times (d_1 + d_2)$ -Matrix J :

$$(J^2)_{ij} = \sum_{l=1}^{d_1+d_2} J_{il} J_{lj} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{d_1} A_{il} A_{lj} & \text{falls } i, j \leq d_1, \\ \sum_{l=1}^{d_2} B_{il} B_{lj} & \text{falls } i, j > d_1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies zeigt

$$J^2 = \begin{pmatrix} A^2 & \\ & B^2 \end{pmatrix}.$$

In ähnlicher Weise zeigt man

$$J^\alpha = \begin{pmatrix} A^\alpha & \\ & B^\alpha \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}$. Da \exp als Potenzreihe definiert ist, folgt bereits

$$\exp(J) = \begin{pmatrix} \exp(A) & & \\ & \exp(B) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Da nach Induktionsvoraussetzung

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & & \\ & \exp(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(A_k) \end{pmatrix},$$

folgt die Behauptung.

(2) Wir schreiben den JORDANblock als $J = \lambda I + N$, wobei I die $d \times d$ -Einheitsmatrix ist und

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist nicht schwer, die Potenzen von N zu berechnen: Für jedes $\beta \in \mathbb{N}$ gilt nämlich $(N^\beta)_{i,j} = 1$ falls $j = i + \beta$ und $(N)_{i,j} = 0$ sonst. (Die Nebendiagonale mit den Einsen wird also um $\beta - 1$ nach rechts geschoben.)

Da die Einheitsmatrix mit jeder anderen Matrix kommutiert, dürfen wir zur Berechnung der Potenzen von J die binomische Formel heranziehen und erhalten so für $\alpha \in \mathbb{N}$

$$J^\alpha = (\lambda I + N)^\alpha = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \lambda^{\alpha-\beta} N^\beta.$$

Daher ist (beachte $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\alpha=\beta}^{\infty}$)

$$\begin{aligned} \exp(tJ) &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{t^\alpha}{\alpha!} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \lambda^{\alpha-\beta} N^\beta \\ &= \sum_{\beta=0}^{\infty} N^\beta \left(\sum_{\alpha=\beta}^{\infty} \frac{(t\lambda)^\alpha}{(\alpha-\beta)! \beta!} \lambda^{-\beta} \right) \\ &= \sum_{\beta=0}^{\infty} N^\beta \frac{t^\beta}{\beta!} \sum_{\alpha=\beta}^{\infty} \frac{(t\lambda)^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!} \\ &= \sum_{\beta=0}^{\infty} N^\beta \frac{t^\beta}{\beta!} e^{t\lambda}. \end{aligned}$$

Da aber, wie erwähnt, N^β die Matrix mit lauter Einsen auf der β -ten Nebendiagonalen ist, ist dies genau die Behauptung.

BEMERKUNG 3.13. Bei der Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion mittels JORDAN-Normalform handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Diagonalisierungsmethode (da die JORDAN-Normalform einer diagonalisierbaren Matrix einfach die Diagonalisierung ist). Der vorige Abschnitt 3.3.1 hatte also eine rein didaktische Funktion. □

Damit ist unser „Kochrezept“ zur Lösung linearer Systeme von ODE (mit konstanten Koeffizienten) fertig: Man nehme die DUHAMEL-Formel und berechne die auftretenden Matrix-Exponentiale mit dem eben gezeigten Lemma (wovon Lemma 3.9 lediglich ein Spezialfall ist). Zusammengefaßt:

- (1) Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem durch $x'(t) = Ax + g(t)$ mit Anfangswert $x(t^0) = x^0$ (ggf. muß man eine lineare Gleichung höherer Ordnung zunächst wie in Abschnitt 2.2 in diese Form bringen).
- (2) Die DUHAMEL-Formel (Korollar 3.8) liefert als Lösung

$$x(t) = \exp((t - t^0)A)x^0 + \exp(tA) \int_{t^0}^t \exp(-sA)g(s)ds.$$

- (3) Es ist $\exp(tA)$ zu berechnen. Bringe dazu A in JORDAN-Normalform, schreibe also $A = SJS^{-1}$, wobei S invertierbar und J JORDAN ist.
- (4) Es ist dann $\exp(tA) = S \exp(tJ) S^{-1}$.
- (5) Zur Berechnung von $\exp(tJ)$ verwende Lemma 3.12: Wegen Teil (1) des Lemmas genügt es, jeden JORDANblock einzeln zu exponentieren; dies wiederum geschieht mit der Formel aus Teil (2).

Für jeden praktisch relevanten Fall ist die Durchführung dieses Rezepts mit Papier und Bleistift natürlich ein Grauen; man mache sich daher mit einer geeigneten Software bekannt (sei es auch nur, indem Sie „Jordan normal form online calculator“ googeln).

Zum Abschluß des Kapitels geben wir noch ein Beispiel.

BEISPIEL 3.14 (harmonischer Oszillator mit kritischer Dämpfung). Wir erinnern uns an Beispiel 1.10, in dem wir die gedämpfte harmonische Oszillatorgleichung

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = 0$$

in ad-hoc-Manier untersucht hatten. Insonderheit hatten wir den kritischen Fall $\lambda = \omega_0 > 0$ betrachtet. Für unser Kochrezept schreiben wir die Gleichung zunächst mit $y := x'$ um als

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

sodaß wir also $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & -2\lambda \end{pmatrix}$ zu untersuchen haben. Es stellt sich heraus, daß

$$A = SJS^{-1} = S \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} S^{-1}$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\lambda} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 3.12 ist

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & te^{-\lambda t} \\ 0 & e^{-\lambda t} \end{pmatrix}$$

Wählen wir wie in Beispiel 1.10 die Anfangswerte $t^0 = 0$, $x(0) = x^0$, $y(0) = 0$, so erhalten wir aus Korollar 3.8 die Lösung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & te^{-\lambda t} \\ 0 & e^{-\lambda t} \end{pmatrix} S^{-1} \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix} = x^0 e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 + \lambda t \\ -\lambda^2 t \end{pmatrix},$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1.10.

Stabilitätstheorie

Betrachte zur Motivation die *mathematische Pendelgleichung*

$$x'' + \frac{g}{l} \sin x = 0, \quad (4.1)$$

die die Bewegung einer an einer starren Stange der Länge l befestigten Masse beschreibt, die um eine fixe Achse pendelt. Es werden Reibungsverluste etc. vernachlässigt. Hier ist g die Erdbeschleunigung und x wird als Winkel der Auslenkung interpretiert. Man denke etwa an das Pendel einer Uhr, eine Schiffschaukel oder ähnliches. Werden nur kleine Auslenkungen betrachtet, so approximiert man $\sin x \sim x$, und erhält damit die harmonische Oszillatorgleichung aus Beispiel 1.4 zurück.

Es gibt zwei spezielle Lösungen dieser ODE, die von der Zeit unabhängig sind (sogenannte *Gleichgewichtszustände* oder *Äquilibria*): $x \equiv 0$ oder $x \equiv \pi$. (Natürlich kann man auch $x \equiv k\pi$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ nehmen.) Die erste Lösung beschreibt eine konstante Auslenkung des Pendels um null Grad; das Pendel hängt also senkrecht nach unten. Die zweite Lösung dagegen beschreibt eine konstante Auslenkung um 180 Grad, das Pendel steht also senkrecht nach oben.

Die erste Situation ist, obzwar nicht besonders interessant, so doch durchaus gewöhnlich: Eine stehengebliebene Standuhr wird genau ein solches ruhendes Pendel aufweisen. Die zweite Situation dagegen findet man in der Realität kaum vor: Es hatte noch niemand das Pech, in einer Schiffschaukel zu verhungern, weil diese am obersten Punkt einfach stehenblieb; ebenso hat es noch niemand geschafft, einen Bleistift so genau auf einem Tische aufzustellen, daß jener einfach senkrecht stehengeblieben wäre.

Es scheint also unterschiedliche Arten von Gleichgewichtslösungen von ODE zu geben: Die einen sind *stabil*, da minimale Ungenauigkeiten ihr Verhalten kaum beeinflussen (wie die Lösung $x \equiv 0$ von (4.1)); die anderen *instabil*, weil der Ruhezustand bereits aufgrund kleinster Störungen zusammenbricht (wie $x \equiv \pi$ in (4.1)); so fällt etwa der senkrecht aufgestellte Bleistift sofort um, weil seine Masse nicht vollständig homogen verteilt ist, die Spitze nicht exakt radialsymmetrisch ist, ein minimaler Luftzug herrscht, etc. Instabile Lösungen werden in der Realität nicht oder nur für sehr kurze Zeit beobachtet.

Ziel dieses letzten Kapitels ist es, diese Phänomene präzise zu beschreiben und das grundlegende Verfahren der Stabilitätsanalyse durch Linearisierung vorzustellen.

4.1. Autonome Systeme und Phasenportraits

Wir beschränken uns insfort auf ODEs, deren rechte Seite nicht explizit von t abhängt, also auf Gleichungen der Form

$$x'(t) = f(x(t))$$

für ein $f : \mathbb{R}^m \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Man nennt solche ODEs *autonom*. Dann ist f nichts anderes als ein Vektorfeld, das visualisiert werden kann, indem man an jeden Punkt $x \in \Omega$ den Vektor $f(x)$ anheftet. Die Menge Ω , die die möglichen „Zustände“ x des modellierten Systems enthält, bezeichnet man – etwas präventiv – als *Phasenraum* (obschon es sich im allgemeinen gar nicht um einen Vektorraum handelt).

Wir setzen nunmehr stets voraus, daß f auf jeder kompakten Teilmenge von Ω LIPSCHITZ-stetig ist, sodaß für gegebenes Anfangsdatum $x(0) = x^0$ eine eindeutige Lösung auf

dem maximalen Existenzintervall $(T^-, T^+) \ni 0$ existiert. Die Lösung kann dann als Kurve $(T^-, T^+) \rightarrow \Omega$, $t \mapsto x(t)$ im Phasenraum visualisiert werden, deren Bild $\{x(t) : t \in (T^-, T^+)\}$ als *Trajektorie*¹ durch x^0 (oder *Bahn* von x^0) bezeichnet wird.

Die Gleichung $x' = f(x)$ besagt dann, daß jede Trajektorie zum Vektorfeld f tangential verläuft. (Man sagt auch, die Trajektorien seien die zum Vektorfeld f gehörigen *Integralkurven*.) Man kann eine autonome ODE (zumindest für $m = 2$) also gleichsam geometrisch lösen, indem man – ausgehend vom Anfangswert – einfach dem Vektorfeld folgt, also die Lösungskurve tangential zum Vektorfeld anzeichnet. Beachte: Aufgrund der Existenz und Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem schneiden sich verschiedene Trajektorien nicht, und die Trajektorien bilden eine Partition des Phasenraums, d.h. die disjunkte Vereinigung aller Trajektorien ist genau Ω . Wir geben sogleich Beispiele. Zunächst aber:

DEFINITION 4.1. Eine stetig differenzierbare Funktion $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* der Gleichung $x' = f(x)$, wenn sie entlang jeder Trajektorie konstant ist, wenn also für jedes $t^0 \in \mathbb{R}$ und $x^0 \in \Omega$ gilt

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = 0$$

für alle $t \in (T^-, T^+)$, wobei x die Lösung von $x' = f(x)$ mit Anfangswert $x(t^0) = x^0$ und maximalem Existenzintervall (T^-, T^+) ist.

Trivialerweise ist jede konstante Funktion ein erstes Integral (zu jeder autonomen ODE). Interessante erste Integrale haben oftmals physikalische Bedeutung (z.B. die Gesamtenergie), siehe das nächste Beispiel. Der Gradient eines ersten Integrals steht stets orthogonal auf dem Vektorfeld f , denn nach Kettenregel ist

$$0 = \frac{d}{dt}H(x(t)) = \nabla H(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla H(x(t)) \cdot f(x(t)),$$

und für $t = 0$ und beliebiges $x^0 \in \Omega$ erhält man so die Orthogonalität in jedem Punkt von Ω .

BEISPIEL 4.2. Für das mathematische Pendel (4.1) schreiben wir zunächst, wie gewohnt mit $y := x'$ (Winkelgeschwindigkeit des Pendels),

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{l} \sin x \end{pmatrix}.$$

Das Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{l} \sin x \end{pmatrix}$ ist in Abbildung 1 zu sehen, ebenso einige Trajektorien (durchgezogen in blau). Man erkennt folgendes: Um die *stabilen* Gleichgewichtslösungen $(2k\pi, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) bilden die Trajektorien geschlossene Kurven, die in der Nähe des Gleichgewichts kreisförmig erscheinen (denn für $x \sim 2k\pi$ ist $\sin x \sim x - 2k\pi$, und man erhält mit dieser Approximation die harmonische Oszillatorgleichung, deren Trajektorien gemäß Beispiel 3.10 tatsächlich Kreise sind). Diese Trajektorien beschreiben periodische Lösungen, bei denen das Pendel hin- und zurückschwingt. Neben den geschlossenen Trajektorien findet man auch unbeschränkte (für hinreichend großes $|y|$); diese beschreiben eine Pendelbewegung mit Überschlag: Das Pendel schwingt nicht zurück, sondern überschlägt sich, sodaß sich die Auslenkung nach jedem Überschlag um 2π erhöht hat. Diese beiden Lösungstypen werden voneinander gesondert durch Trajektorien, die je zwei *instabile* Äquilibria der Form $((2k+1)\pi, 0)$ miteinander verbinden. Eine solche kritische Trajektorie nennt man *Separatrix*. Sie beschreibt die Bewegung des Pendels, wenn es genau so viel Energie hat, um den oberen Punkt ($x = (2k+1)\pi$) zu erreichen; bei der Annäherung an die Auslenkung von 180 Grad wird das Pendel immer langsamer und erreicht daher die maximale Auslenkung nicht in endlicher Zeit (wohl aber $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (2k+1)\pi$).

¹Aussprache wie „Iphigenie“, also fünfsilbig mit Betonung auf der dritten Silbe.

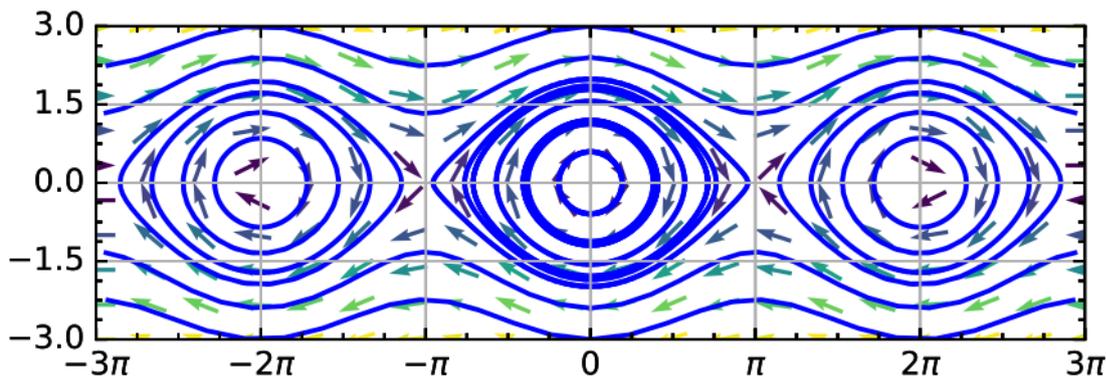


ABBILDUNG 1. Phasenportrait des mathematischen Pendels. Quelle: [4].

Ein erstes Integral für die Pendelgleichung ist durch die Gesamtenergie²

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{l} \cos x,$$

gegeben, wie man selbst verifizieren möge.

BEISPIEL 4.3. In Beispiel 1.12 haben wir das Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned} x' &= x(\alpha - \beta y), \\ y' &= y(\delta x - \gamma) \end{aligned} \tag{4.2}$$

betrachtet, das die zeitliche Entwicklung einer Räuber- (y) und einer Beutepopulation (x) beschreibt. Einige Trajektorien dieses Systems sind in Abbildung 2 zu sehen. Man erkennt, daß die Lösungen periodisch sind (Zeitevolution gegen den Uhrzeigersinn): Ein Überschuß an Räubern bei kaum vorhandener Beute (oberster Punkt einer Trajektorie) führt zu einer Verringerung an Räubern, woraufhin sich die Beutepopulation erholt. Die Beutepopulation erreicht ein Maximum (ganz rechts), während dadurch bereits die Räuberpopulation ansteigt. Mit dem weiteren Anstieg der Räuberpopulation verringert sich wieder die Beute, und alles fängt wieder von vorne an.

Bei $(x, y) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ liegt, wie bereits in Beispiel 1.12 bemerkt, das einzige nichttriviale Äquilibrium des Systems vor (in Abbildung 2 liegt dieser Punkt irgendwo innerhalb der orangen Kurve). Startet man dort, so kommt es zu keinen Schwankungen der beiden Populationen.

Man überzeuge sich davon, daß

$$H(x, y) := \delta x - \gamma \log x + \beta y - \alpha \log y$$

ein erstes Integral ist.

4.2. Stabilität

Den im vorigen Abschnitt motivierten Begriff der Stabilität wollen wir nun präzisieren.

DEFINITION 4.4 (Äquilibrium). Sei $x' = f(x)$ ein autonomes System von ODEs mit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ LIPSCHITZ auf jedem Kompaktum. Ein Punkt x^* heißt *Äquilibrium* (oder *Gleichgewichtszustand*) dieses Systems, wenn $f(x^*) = 0$.

Offenbar ist $x \equiv x^*$ eine konstante Lösung des Systems.

²Physikalisch gesehen ist die Energie tatsächlich gleich ml^2H , wobei m die am Pendel befestigte Masse ist.

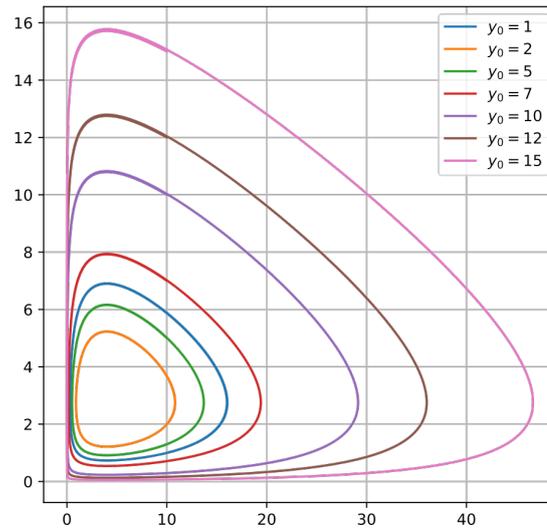


ABBILDUNG 2. Einige Trajektorien des Räuber-Beute-Modells. Quelle: [5].

DEFINITION 4.5 (Stabilität von Äquilibria). Sei x^* ein Äquilibrium von $x' = f(x)$ und bezeichne $T^+(x(t^0))$ die maximale Existenzzeit des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(t^0) = x(t^0)$. Dann heißt x^*

- *stabil*, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x^*) \subset \Omega$ ein $\delta > 0$ existiert, sodaß

$$x(t^0) \in B_\delta(x^*) \implies x(t) \in B_\epsilon(x^*) \quad \forall t \in [t^0, T^+(x(t^0))];$$
- *instabil*, wenn es nicht stabil ist;
- *attraktiv*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodaß $x^0 \in B_\delta(x^*)$ impliziert $T^+(x^0) = +\infty$, und

$$x(t^0) \in B_\delta(x^*) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*;$$
- *asymptotisch stabil*, wenn es stabil und attraktiv ist.

Ein Äquilibrium ist also stabil, wenn eine beliebige Umgebung im Phasenraum niemals verlassen wird, sofern man nur hinreichend nah bei x^* startet; es ist attraktiv, wenn hinreichend nahe bei x^* startende Evolutionen dem Äquilibrium zustreben. Stabilität und Attraktivität implizieren einander nicht: Es gibt stabile Gleichgewichte, die nicht attraktiv sind, und umgekehrt³. Zumindest für das erstgenannte Phänomen kennen wir bereits ein Beispiel: In der harmonischen Oszillatorgleichung aus Beispiel 3.4 ist, wie man sich leicht anhand der expliziten Lösung überzeugt, das Äquilibrium $(0, 0)$ stabil, aber nicht attraktiv (denn $|(x(t), y(t))|$ ist konstant in t).

Ist für ein zu untersuchendes System ein erstes Integral bekannt, so gibt ein einfaches hinreichendes Kriterium für die Stabilität eines Äquilibria:

SATZ 4.6. Sei x^* ein Äquilibrium von $x' = f(x)$ und H ein zweimal stetig differenzierbares erstes Integral mit $DH(x^*) = 0$. Ist die HESSE-Matrix $D^2H(x^*)$ positiv oder negativ definit, so ist x^* stabil.

BEWEIS. Sei O.B.d.A. $x^* = 0$ (sonst betrachte $f(x + x^*)$) und $H(x^*) = 0$ (sonst betrachte $H - H(x^*)$).

Sei zusätzlich o.B.d.A. $D^2H(0) > 0$ (sonst betrachte $-H$). Da H zweimal stetig differenzierbar ist mit $H(0) = 0$, $DH(0) = 0$ und $D^2H(0) > 0$, so gibt es eine Umgebung $B_\eta(0)$ und ein $\gamma > 0$, sodaß für alle $x \in B_\eta(0)$ gilt: $H(x) \geq \gamma|x|^2$ (vergleiche [3, Beweis von Satz 7.22]).

³Sonst bräuchten wir den Begriff der asymptotischen Stabilität ja nicht gesondert einzuführen.

Sei $\epsilon > 0$. Da H stetig ist, existiert ein $\eta \geq \delta > 0$, sodaß $x^0 \in B_\delta(0)$ impliziert $H(x^0) < \gamma \min\{\epsilon, \frac{\eta}{2}\}^2$. Da H entlang jeder Lösung konstant ist, folgt insbesondere $H(x(t)) < \gamma(\frac{\eta}{2})^2$ für alle $t \in [t^0, T^+(x^0))$.

Würde nun für irgendein $\tau \in (t^0, T^+(x^0))$ gelten $|x(\tau)| = \eta$, so wäre auch $H(x(\tau)) \geq \gamma\eta^2$, was wir soeben ausgeschlossen haben; es folgt daher $x(t) \in B_\eta(0)$ für alle $t \in [t^0, T^+(x^0))$.

Aus $H(x^0) < \gamma\epsilon^2$ und $x(t) \in B_\eta(0)$ für alle $t \in [t^0, T^+(x^0))$ folgt nun aber $\gamma|x(t)|^2 < \gamma\epsilon^2$, und daher wie behauptet $|x(t)| < \epsilon$, für alle $t \in [t^0, T^+(x^0))$. □

Zur Übung überzeuge man sich mithilfe dieses Satzes und der in den vorigen Beispielen angegebenen ersten Integrale, daß die Äquilibria $(0, 0)$ für das mathematische Pendel und $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ für das Räuber-Beute-Modell jeweils stabil sind.

4.3. Stabilität linearer Systeme

Wir betrachten wieder lineare Systeme der Gestalt $x' = Ax$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine (von t unabhängige) Matrix ist. Da wir dieses System explizit lösen können, ist es nun leicht, die Stabilität des Äquilibriums $x^* = 0$ zu analysieren.

LEMMA 4.7. *Es mögen alle Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ negativen Realteil haben. Dann gibt es $M > 0$ und $\sigma > 0$, sodaß*

$$|e^{tA}| \leq M e^{-\sigma t}$$

für alle $t \geq 0$.

BEWEIS. Sei $A = SJS^{-1}$, wobei S invertierbar ist und J in JORDAN-Normalform vorliegt. Nach Lemma 3.12 ist $\exp(tJ)$ von der Gestalt

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} B_1(t) & & & \\ & e^{\lambda_2 t} B_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_k t} B_k(t) \end{pmatrix},$$

wobei λ_j der zum j -ten JORDANblock gehörige Eigenwert ist und $B_j(t)$ eine Matrix bezeichnet, deren Einträge nichtverschwindende Polynome in t sind. Schreiben wir $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ und setzen

$$\sigma := -\frac{1}{2} \max\{\alpha_j : j = 1, \dots, k\} > 0$$

Dann gilt, da $|e^{i\beta_j t}| = 1$:

$$|\exp(tJ)|^2 = \sum_{j=1}^k e^{2\alpha_j t} |B_j(t)|^2 \leq e^{-2\sigma t} \sum_{j=1}^k e^{\alpha_j t} |B_j(t)|^2,$$

und die Summe ist in $t \geq 0$ beschränkt, da $e^{\alpha_j t}$ schneller abklingt als jedes Polynom wächst. Setzen wir also

$$M^2 := \sup_{t \geq 0} |S| \left(\sum_{j=1}^k e^{\alpha_j t} |B_j(t)|^2 \right) |S^{-1}|,$$

so gilt wie gewünscht

$$|e^{tA}|^2 = |S e^{2tJ} S^{-1}| \leq |S| |e^{tJ}|^2 |S^{-1}| \leq e^{-2\sigma t} M^2. \quad \square$$

SATZ 4.8 (Stabilitätskriterien für lineare Systeme). Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

- (1) Haben alle Eigenwerte von A negativen Realteil, so ist das Äquilibrium $x^* = 0$ asymptotisch stabil.

(2) Existiert ein Eigenwert von A mit positivem Realteil, so ist $x^* = 0$ instabil.

BEWEIS. Sei o.B.d.A. $t^0 = 0$ (sonst betrachte statt einer Lösung x die Lösung $x(\cdot + t^0)$). Sei $x^0 \in \mathbb{R}^m$, so lautet die Lösung des Anfangswertproblems $x' = Ax$, $x(0) = x^0$ gemäß Satz 3.5 $x(t) = \exp(tA)x^0$. Nach Lemma 4.7 ist nun aber

$$|x(t)| \leq |x^0| M e^{-\sigma t}$$

für (nur von A abhängige) Konstanten $M > 0$, $\sigma > 0$. Klar ist deshalb $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, also ist $x^* = 0$ attraktiv. Es ist aber auch stabil, denn es genügt in der Definition der Stabilität für $\epsilon > 0$ die Wahl $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ zu treffen. Damit ist (1) gezeigt.

Sei nun für (2) $A = SJS^{-1}$ die JORDAN-Zerlegung wie in Lemma 4.7. Angenommen nun, ein Eigenwert λ_j habe positiven Realteil $\alpha_j > 0$, und o.B.d.A. sei $j = 1$. Für $x^0 := Se_1 \neq 0$ (wobei $e_1 \in \mathbb{R}^m$ der erste Einheitsvektor ist) gilt dann

$$x(t) = S \exp(tJ)e_1 = e^{\lambda_1 t} S e_1 = e^{\lambda_1 t} x^0,$$

da nach unserer expliziten Formel aus Lemma 3.12 die erste Spalte von $\exp(tJ)$ gerade gleich $e^{\lambda_1 t} e_1$ ist. Wähle nun zum Beispiel $\epsilon = 1$, so gilt für jedes $\delta > 0$: Ist x die Lösung mit Anfangswert δx^0 , so ist $x(t) = \delta e^{\lambda_1 t} x^0$ und daher

$$|x(t)| = \delta e^{\alpha_1 t} |x^0| \rightarrow \infty$$

mit $t \rightarrow \infty$. Also kann x^* nicht stabil sein, und (2) ist gezeigt. □

BEMERKUNG 4.9. Im vorigen Satz wird der Fall, daß alle Eigenwerte Realteil ≤ 0 haben, aber mindestens ein Realteil gleich null ist, nicht behandelt. Aus der Formel für das Exponential der JORDAN-Normalform erhält man in diesem Falle Stabilität (aber nicht Attraktivität), falls die JORDANblöcke zu den Eigenwerten mit Realteil null 1×1 sind (man sagt dann, diese Eigenwerte seien *halbeinfach*), und ansonsten Instabilität. Ein Beispiel für ein solchermaßen stabiles Gleichgewicht ist abermals der harmonische Oszillator aus Beispiel 3.4, für den die beiden Eigenwerte $\pm i$ jeweils halbeinfach (sogar einfach) sind. Für diagonalisierbare Matrizen ist dies stets der Fall, d.h. ist A diagonalisierbar, so ist ein Äquilibrium bereits dann stabil, wenn alle Eigenwerte nichtpositiven Realteil haben.

4.4. Nichtlineare Systeme

Wir haben durch Satz 4.6 ein hinreichendes Kriterium für Stabilität kennengelernt, sofern ein erstes Integral bekannt ist. Hier stellen wir noch eine Methode zur Stabilitätsanalyse vor, die ohne ein erstes Integral auskommt. Sie beruht auf der Linearisierung eines nichtlinearen Problems um das Äquilibrium und der Analyse linearer Systeme im vorigen Abschnitt.

SATZ 4.10 (Linearisierte Stabilität). Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $f(x^*) = 0$.

- (1) Wenn jeder Eigenwert der JACOBI-Matrix $Df(x^*) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ negativen Realteil hat, so ist x^* ein asymptotisch stabiles Äquilibrium des Systems $x' = f(x)$.
- (2) Existiert ein Eigenwert von $Df(x^*)$ mit positivem Realteil, so ist x^* instabil.

BEMERKUNG 4.11. Sind alle Realteile von Eigenwerten von $Df(x^*)$ nichtpositiv, aber mindestens einer gleich null, so läßt sich – auch mit den in Bemerkung 4.9 skizzierten Erwägungen – keine Aussage über die Stabilität treffen. Betrachte zum Beispiel für $m = 1$ die rechte Seite $f(x) = \alpha x^3$ mit dem Äquilibrium $x^* = 0$. Dann ist $f'(0) = 0$, aber für $\alpha = 0$ ist das Äquilibrium stabil (aber nicht attraktiv), für $\alpha > 0$ instabil, und für $\alpha < 0$ asymptotisch stabil. Man überzeuge sich davon (intuitiv durch Phasenporträt oder rechnerisch durch explizite Lösung) zu Zwecken der Übung.

BEWEIS. Wir zeigen nur den ersten Teil⁴.

Schritt 1. Sei o.B.d.A. $x^* = 0$, denn wenn dies nicht der Fall ist, so betrachte statt des Anfangswertproblems $x' = f(x)$, $x(t^0) = x^0$ das Anfangswertproblem $x' = f(x + x^*)$, $x(t^0) = x^0 - x^*$. Ist x eine Lösung des ersten Problems, so ist $x - x^*$ eine Lösung des zweiten, und x^* ist (asymptotisch) stabil für jenes genau dann, wenn 0 (asymptotisch) stabil für dieses ist.

Setze $A := Df(0)$. Da f stetig differenzierbar ist mit $f(0) = 0$, existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $\rho > 0$ dergestalt, daß

$$|f(x) - Ax| \leq \eta|x| \quad (4.3)$$

falls $x \in \overline{B_\rho(0)} \subset \Omega$.

Schritt 2. Sei zunächst $\eta > 0$ fix und ρ die zugehörige Zahl aus Schritt 1. Sei o.B.d.A. $t^0 = 0$ und x die Lösung von $x' = f(x)$, $x(0) = x^0$, für ein $x^0 \in B_\rho(0)$. Die maximale Existenzzeit heiße T^+ . Wir schreiben

$$x' = f(x) = Ax + (f(x) - Ax) = Ax + g,$$

wobei $g(t) := f(x(t)) - Ax(t)$. Gemäß der DUHAMEL-Formel (Korollar 3.8) ist dann

$$x(t) = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)ds$$

für alle $t \in [0, T^+)$.

Schritt 3. Wir zeigen zunächst $T^+ = \infty$ für hinreichend kleines $|x^0|$. Wäre $T^+ < \infty$, so würde x nach Proposition 2.16 in endlicher Zeit aus $B_\rho(0)$ austreten, d.h.

$$\tau := \sup\{t \in (0, T^+) : |x(s)| < \rho \quad \forall s \in (0, t)\} < T^+ < \infty.$$

Insbesondere ist dann $|x(\tau)| = \rho$.

Für $t \in [0, \tau]$ können wir nun vermöge Lemma 4.7 abschätzen

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |e^{tA}x^0| + \int_0^t |e^{(t-s)A}g(s)|ds \\ &\leq |e^{tA}x^0| + \eta \int_0^t |e^{(t-s)A}x(s)|ds \\ &\leq Me^{-\sigma t}|x^0| + \eta Me^{-\sigma t} \int_0^t e^{\sigma s}|x(s)|ds. \end{aligned}$$

Setzen wir $\phi(t) := e^{\sigma t}|x(t)|$, so wird daraus

$$\phi(t) \leq M|x^0| + \eta M \int_0^t \phi(s)ds$$

für alle $t \in [0, \tau]$. Mit GRÖNWALL erhalten wir

$$e^{\sigma t}|x(t)| \leq M|x^0| \exp(M\eta t),$$

also

$$|x(t)| \leq M|x^0| \exp((M\eta - \sigma)t). \quad (4.4)$$

Beachten wir noch, daß M und σ nur von A abhängen (aber nicht von η oder x^0), so können wir $\eta > 0$ so klein wählen, daß $M\eta - \sigma < 0$, und $\delta := \min\{\rho, \frac{\rho}{M}\}$. Ist dann $x^0 \in B_\delta(0)$, so ist $|x(\tau)| < \rho$, im Widerspruch zu $|x(\tau)| = \rho$. Es folgt $\tau = T^+ = \infty$.

Schritt 4. Aus (4.4) folgt sofort die Attraktivität von $x^* = 0$. Sei nun $\epsilon > 0$ und setze $\delta := \min\{\rho, \frac{\rho}{M}, \frac{\epsilon}{M}\}$. Dann besagt (4.4), daß $x(t) \in B_\epsilon(0)$ für alle $t \geq 0$, falls $x^0 \in B_\delta(0)$, und der Beweis ist fertig. □

⁴Den zweiten dürfen Sie in Übungen und Prüfungen trotzdem verwenden.

BEISPIEL 4.12 (gedämpftes Pendel). Betrachten wir die Gleichung

$$x'' + x' + \sin x = 0,$$

die ein Fadenpendel mit Dämpfung (z.B. durch Luftwiderstand) beschreibt (physikalische Konstanten haben wir nun der Einfachheit halber gleich eins gesetzt). Wir schreiben wie üblich mit $y = x'$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(x, y) := \begin{pmatrix} y \\ -\sin x - y \end{pmatrix}$$

und erkennen $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ als Äquilibria. Wegen

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -1 \end{pmatrix}$$

ist $Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $Df(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte der ersten Matrix lauten $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$, die der zweiten $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Nach vorigem Satz ist also $(0, 0)$ asymptotisch stabil und $(\pi, 0)$ instabil, wie zu erwarten war (vgl. die Diskussion zu Beginn dieses Kapitels).

BEISPIEL 4.13. Wir betrachten noch einmal das SIR-Modell für Epidemien, Beispiel 1.13:

$$S' = -\beta SI,$$

$$I' = \beta SI - \gamma I,$$

$$R' = \gamma I.$$

Da die letzte Gleichung redundant ist (denn nach Lösen der ersten beiden Gleichungen kann man R durch $R = N - I - S$ ausrechnen, wobei N die konstante Gesamtpopulation ist), studieren wir lieber das System

$$S' = -\beta SI,$$

$$I' = \beta SI - \gamma I.$$

Damit ein Äquilibrium vorliege, muß die rechte Seite null sein, also $-\beta SI = 0$ sowie $I(\beta S - \gamma) = 0$. Dies ist genau für die Paare $(S, 0)$ erfüllt mit $S \in \mathbb{R}$ (allerdings sind im Modell nur nichtnegative Werte für S sinnvoll). Wegen

$$Df(S, I) = \begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{pmatrix}$$

haben wir

$$Df(S, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta S \\ 0 & \beta S - \gamma \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten 0 und $\beta S - \gamma$. Ist nun $\theta = \frac{\beta}{\gamma}$ nicht größer als S , so läßt obiger Satz keine Aussage zu; ist aber $\theta > \frac{1}{S}$, so ist $I = 0$ instabil, das bedeutet: Auch eine sehr geringe Zahl von Infizierten kann zu einem beträchtlichen Ausbruch der Epidemie führen, sofern der Parameter θ groß ist. Oder anders formuliert: Im Falle großer Kontagiosität, kleiner Genesungsrate und vieler Individuen, die noch keine Immunität ausgebildet haben, können anfänglich wenige Infektionen den Ausbruch einer Epidemie herbeiführen.

Literaturverzeichnis

- [1] B. AULBACH. Gewöhnliche Differenzialgleichungen [sic!], *Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg*, 2. Aufl. 2010.
- [2] J. M. GOTTMAN et al. The mathematics of marriage: dynamic nonlinear models, *MIT Press, Cambridge, MA*, 2002.
- [3] E. WIEDEMANN. Analysis. Vorlesungsskript Uni Ulm 2018/19.
- [4] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pendulum_phase_portrait.svg, zuletzt aufgerufen am 28.3.2020.
- [5] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Predator_prey_dynamics.svg, zuletzt aufgerufen am 28.3.2020.