Mathematische Logik

Vorlesung von Prof. Dr. Emil Wiedemann
im Sommersemester 2020

Notizen getippt von Gabriel Knöbl

10. August 2020

Vorwort

In dieser Vorlesung geht es um folgende Grundfragen:

1. Was ist ein Beweis?

2. Was kann man beweisen?

Dazu werden wir den Beweisbegriff *formalisieren*, sodass man ihn in *formaler Sprache* ausführen kann. Vorteile dieser Formalisierung sind zum einen, dass Ungenauigkeiten natürlicher Sprachen vermieden werden. Weiterhin kann dadurch ein Beweis selbst als mathematisches Objekt betrachtet werden. Außerdem kann ein Beweis in formaler Sprache automatisiert von einem Computer überprüft werden.
Das Ziel dieser Vorlesung ist der GÖDEL*sche Vollständigkeitssatz*. Er besagt ungefähr, dass alles, was aus Axiomen folgt, die in Prädikatenlogik erster Stufe formuliert werden können, auch formal bewiesen werden kann.

Inhaltsverzeichnis

1 Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe

Prädikatenlogik ermöglicht die Formalisierung von Aussagen wie „$2+2=4$ *und* $3+3=6$", „$2+2=4$ *und* $2+2=6$", „$x=-1$ *oder* $x=+1$", „*Aus* $x=2$ *folgt* $x^2=4$", „*Für alle x gilt: Ist x eine gerade Zahl größer als* 2*, so ist x die Summe zweier Primzahlen*" (GOLDBACHsche Vermutung, bis heute weder bewiesen noch widerlegt) oder „*Es gibt ein x mit* $x \neq x$".
Die *Syntax* befasst sich allein mit der *Form*, nicht aber mit der *Bedeutung* prädikaten-logischer Ausdrücke (→ Kapitel 2 „Semantik").

1.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

Definition 1.1 (Alphabet)**.** Das **Alphabet** einer Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe umfasst folgende Zeichen:

(a) abzählbar viele **Variablen** (z.B. $v_1, v_2, ...$)

(b) **Junktoren**: $\neg$ (sprich: „nicht", strenggenommen kein Junktor),
$\wedge$ („und"), $\vee$ („oder"), $\longrightarrow$ („impliziert"), $\longleftrightarrow$ („ist äquivalent zu")

(c) **Quantoren**: $\forall$ („für alle"), $\exists$ („(es) existiert") [1]

(d) **Gleichheit**: $\equiv$

(e) **Klammern**: (,)

(f) (i) Symbole (z.B. $R_1, R_2, ...$) für **Relationen**
(ii) Symbole (z.B. $f_1, f_2, ...$) für **Funktionen**
(iii) **Konstanten** $c_1, c_2, ...$

Für die Variablen können natürlich auch Zeichen wie x, y, z verwendet werden.

Die Zeichen unter (a) bis (e) sind Bestandteil des Alphabets *jeder* Sprache.

Die Menge der Zeichen unter (f) heißt **Symbolmenge** der Sprache. Verschiedene Sprachen können unterschiedliche Symbolmengen haben. Die Symbolmenge kann dabei sogar leer sein.

[1] ***Vorsicht:*** Bisher sind die Junktoren und Quantoren trotz ihrer Bezeichnungen uninterpretierte Symbole ohne Bedeutung.

Beispiel 1.2 (Äquivalenzrelationen)**.** Sie kennen bereits den Begriff der Äquivalenzrelation, z.B. für $a, b \in \mathbb{Z} : a \cong b$, wenn $a - b$ gerade.
Allgemein: Sei X eine Menge, dann heißt eine Teilmenge $R \subset X \times X$ Äquivalenzrelation, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $(x, x) \in R$,

(ii) Falls $(x, y) \in R$, so folgt auch $(y, x) \in R$ und

(iii) Falls $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann folgt auch $(x, z) \in R$.

Wie können wir nun diese Theorie in Prädikatenlogik formalisieren?

Für die verwendete Sprache übernehmen wir die logischen Zeichen (a) bis (e) aus unserer Definition. Die benötigte Symbolmenge besteht aus einem zweistelligen Relationszeichen R; die Menge der Funktionszeichen und Konstanten ist dabei leer. Dann können wir die Axiome der Äquivalenzrelation schreiben als:

(i) $\forall x\, Rxx$,

(ii) $\forall x \forall y\, (Rxy \longrightarrow Ryx)$ und

(iii) $\forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \longrightarrow Rxz)$.

Beispiel 1.3. Wollen wir mit natürlichen Zahlen rechnen, so könnten wir als Symbolmenge $\{+, \otimes, <, 1\}$ wählen mit

- $+, \otimes$ zweistellige Funktionssymbole
- $<$ zweistelliges Relationssymbol,
- 1 Konstante.

Dann könnten wir folgende Ausdrücke schreiben:

- $\forall v\, (v + v \equiv (1 + 1) \otimes v)$, genauer: $\forall v\, (+v\, v \equiv \otimes + 1\, 1\, v)$
  „Die Summe einer Zahl mit sich selbst ist das Produkt dieser Zahl mit $(1 + 1)$"
- $\exists v \neg\, v \equiv v$
  „Es gibt eine Zahl, die ungleich sich selbst ist". Zwar ist diese Aussage falsch, aber das hindert uns nicht daran, sie aufzustellen!

- $\forall v \exists w\ (v < w)$, genauer: $\forall v \exists w\ (<\ v\, w)$
  „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere“.

Wir wollen nun genauer untersuchen, welche Terme und Ausdrücke mit unserem Alphabet gebildet werden dürfen. Offenbar sollten wir „unsinnige“ Formeln wie „$\equiv\ 1\ x\ R$“oder „$\forall x \forall \exists a\ 1$“ ausschließen.

Sei S die Symbolmenge einer Sprache.

Definition 1.4 (S-Terme)**.** Ein **S-Term** ist eine endliche Anordnung von Zeichen aus (a) bis (e) und S, die man aus folgenden Regeln erhalten kann:

(T1) Jede Variable ist ein Term

(T2) Jede Konstante aus S ist ein Term.

(T3) Sind $t_1, t_2, ..., t_n$ Terme und ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, so ist auch $f\ t_1\ t_2\ \ldots\ t_n$ ein Term.

Beispiele hierzu:

- In Beispiel 1.2 enthält S keine Konstanten und keine Funktionssymbole, also sind die einzigen Terme die Variablen.
- In Beispiel 1.3 sind die folgenden Zeichenketten Terme:

  (i) 1

  (ii) $+v_3\, 1$ (soll heißen: $v3 + 1$)

  (iii) $\otimes + v_1\, v_2 + v_3\, v_4$ (soll heißen: $(v_1 + v_2) \otimes (v_3 + v_4)$)

  Entgegen mathematischer Gepflogenheiten notieren wir also die Addition als $+v_1\, v_2$ (so ähnlich, wie man schreibt $f(v_1, v_2)$ für eine Funktion zweier Variablen) und nicht $v_1 + v_2$.
  Zur Begründung, dass (i) – (iii) Terme sind:

  (i) ist Term nach (T2)

  (ii) v_3 ist Term nach (T1), 1 ist Term nach (T2), also ist $+v_3\, 1$ Term nach (T3).

  (iii) v_1, v_2, v_3, v_4 sind Terme nach (T1); $+v_1\, v_2$ und $+v_3\, v_4$ sind dann Terme nach (T3); also ist $\otimes + v_1\, v_2 + v_3\, v_4$ Term nach (T3).

Aus Termen und Junktoren und Quantoren kann man **Ausdrücke** bilden:

Definition 1.5. Ein S-**Ausdruck** ist eine endliche Anordnung von Zeichen aus (a) bis (e) und S, die man aus folgenden Regeln erhalten kann:

(A1) Für zwei S-Terme t_1, t_2 ist $t_1 \equiv t_2$ ein Ausdruck.

(A2) Für S-Terme $t_1, ..., t_n$ und ein n-stelliges Relationssymbol R ist $R\, t_1...t_n$ ein Ausdruck.

(A3) Für einen Ausdruck φ ist auch $\neg\varphi$ ein Ausdruck.

(A4) Für zwei Ausdrücke φ, ψ sind $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \longrightarrow \psi), (\varphi \longleftrightarrow \psi)$ Ausdrücke.

(A5) Ist φ ein Ausdruck und v eine Variable, so sind auch $\forall v\varphi$ und $\exists v\varphi$ Ausdrücke.

Beispiele:

- In Beispiel 1.2 haben wir geschrieben:
  (i) $\forall x\, Rxx$. Dies ist ein Ausdruck, da Rxx Ausdruck ist nach (A2) und $\forall x\, Rxx$ Ausdruck nach (A5) ist.
  (ii) $\forall x \forall y\, (Rxy \longrightarrow Ryx)$. Dies ist ein Ausdruck, da Rxy und Ryx Ausdrücke nach (A2), $(Rxy \longrightarrow Ryx)$ Ausdruck nach (A4), $\forall y(Rxy \longrightarrow Ryx)$ Ausdruck nach (A5) und $\forall x \forall y\, (Rxy \longrightarrow Ryx)$ wieder nach (A5) sind.
  (iii) $\forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \longrightarrow Rxz)$. Auch dies ist ein Ausdruck mit ähnlicher Begründung wie in (ii).
- In Beispiel 1.3 haben wir unter anderem geschrieben: $\exists v \neg\, v \equiv v$. Dies ist ein Ausdruck, denn $v \equiv v$ ist Ausdruck nach (A1), $\neg\, v \equiv v$ ist Ausdruck nach (A3), und $\exists v \neg\, v \equiv v$ ist ein Ausdruck nach (A5).

Ausdrücke, die nur durch (A1) oder (A2) gewonnen werden, heißen **atomar**. Atomare Ausdrücke sind also genau die Ausdrücke, die keine Junktoren und Quantoren enthalten (z.B. $x \equiv y$, $<\ v_1\, v_2$, $\otimes v_1\, v_2 \equiv v_3$).
Zu einer gegebenen Symbolmenge S sei T^S die Menge der S-Terme und L^S die Menge der S-Ausdrücke.

Lemma 1.6. Sei S höchstens abzählbar, so sind T^S und L^S abzählbar unendlich.

Erinnerung aus Analysis: Eine Menge M heißt **höchstens abzählbar**, wenn eine Surjektion $\mathbb{N} \longrightarrow M$ existiert und **abzählbar unendlich**, falls eine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow M$ existiert.

Beweis des Lemmas: Sei $\mathbb{A}$ das Alphabet, d.h. die Menge der Zeichen von (a) bis (e) vereinigt mit S. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{A}$ abzählbar unendlich (beachte, dass es abzählbar unendlich viele Variablen gibt!). Sei $\mathbb{A}^*$ die Menge aller endlichen Zeichenketten, die aus Elementen von $\mathbb{A}$ gebildet werden können.
Dann ist $\mathbb{A}^*$ die abzählbare Vereinigung der Mengen $\mathbb{A}^n$ über $n \in \mathbb{N}$. Aber $\mathbb{A}^n$ ist das n-fache kartesische Produkt von $\mathbb{A}$ mit sich selbst, also wieder abzählbar. Also ist $\mathbb{A}^*$ abzählbar.
Da $T^S, L^S \subset \mathbb{A}^*$, sind auch T^S, L^S höchstens abzählbar. Da T^S alle Variablen $v_1, v_2, ...$ enthält, ist T^S unendlich. Da L^S alle Ausdrücke der Form $v_1 \equiv v_1, v_2 \equiv v_2, ...$ enthält, ist auch L^S unendlich. □

Unser nächstes Ziel wird es sein zu zeigen, dass sich der Aufbau eines Terms bzw. Ausdrucks eindeutig aus diesem rekonstruieren lässt.

Beispiel: Wir wollen uns erneut an Regel (A4) erinnern: Sind φ, ψ S-Ausdrücke, so auch $(\varphi \wedge \psi)$ und $(\varphi \vee \psi)$. Angenommen, wir hätten (A4) *ohne* Klammern formuliert. Wären dann φ, ψ, χ Ausdrücke, so wäre zunächst $\varphi \wedge \psi$ ein Ausdruck und dann auch $\varphi \wedge \psi \vee \chi$. Andererseits wäre zunächst $\psi \vee \chi$ ein Ausdruck und dann auch $\varphi \wedge \psi \vee \chi$. Das heißt, wir könnten den Ausdruck $\varphi \wedge \psi \vee \chi$ as $\varphi \wedge \psi$ und χ zusammengesetzt denken oder aus φ und $\psi \vee \chi$. Dies würde später zu unguten Konsequenzen führen (z.B., dass der Wahrheitswert von $\varphi \wedge \psi \vee \chi$ nicht wohlbestimmt wäre!).
Da wir Klammern verwenden, können wir aber zwischen $((\varphi \wedge \psi) \vee \chi)$ und $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi))$ unterscheiden.

Dass dies allgemein so ist, wollen wir im Folgenden zeigen. Dazu verwenden wir eine Argumentation, die der *vollständigen Induktion* ähnlich ist:

1.2 Induktion über den Aufbau der Terme/Ausdrücke

Als Beispiel zeigen wir:

Proposition 1.7. Jeder S-Ausdruck enthält genausoviele linke wie rechte Klammern.

Beweis. Alle Terme enthalten keine Klammern, da

(T1) Eine Variable keine Klammer ist,

(T2) Eine Konstante keine Klammer ist,

(T3) Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol und $t_1, ..., t_n$ Terme, so enthalten $t_1, ..., t_n$ keine Klammern (*Induktionsvoraussetzung!*), und dann enthält auch $ft_1...t_n$ keine Klammern.

Damit können wir nun Induktion über den Aufbau der *Ausdrücke* führen:

(A1) Seien t_1 und t_2 Terme. Diese enthalten keine Klammern, also auch $t_1 \equiv t_2$ nicht.

(A2) Sind R ein n-stelliges Relationssymbol und $t_1, ..., t_n$ Terme, so enthalten diese keine Klammern, also auch $Rt_1...t_n$ nicht.

(A3) Ist φ ein Ausdruck, der gleichviele linke wie rechte Klammern enthält (*Induktionsvoraussetzung!*), so auch $\neg\varphi$.

(A4) Seien φ und ψ Ausdrücke mit gleichvielen linken wie rechten Klammern. Dann enthalten $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \longrightarrow \psi)$ und $(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ jeweils eine weitere linke und rechte Klammer, also gleichviele linke wie rechte Klammern.

(A5) Hat φ die gewünschte Eigenschaft, so auch $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$.

$\square$

Zusammengefasst als algemeines Schema:
Wenn wir zeigen wollen, dass jeder S–Term die Eigenschaft E hat, zeigen wir:

(T1) Jede Variable hat E,

(T2) Jede Konstante hat E,

(T3) Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol und haben $t_1, ..., t_n$ die Eigenschaft E, so hat auch $ft_1...t_n$ die Eigenschaft E.

Analog für S–Ausdrücke.

Lemma 1.8.

(a) Seien t, t' S–Terme. Dann ist t kein echtes Anfangsstück von t' (i.e. es gibt keine nichtleere S-Zeichenkette ζ mit $t' = t\zeta$).

(b) Seien φ, φ' S–Ausdrücke. Dann ist φ kein echtes Anfangsstück von φ'.

Beweis. Wir beweisen nur (a), (b) sei dem Leser zur Übung überlassen. Wir führen in diesem Falle Induktion über den Aufbau von t' durch mit der Eigenschaft

(E) Für alle Terme t gilt: t' ist kein echtes Anfangsstück von t und umgekehrt.

(T1) $t' = x$: Sei t ein Term. Dann ist t kein echtes Anfangsstück von t' (weil t' nur aus einem Zeichen besteht und die leere Zeichenkette kein Term ist). Umgekehrt ist t' kein echtes Anfangsstück von t, denn der einzige mit x beginnende Term ist x selbst.

(T2) $t' = c$: Wie (T1).

(T3) $t' = ft'_1...t'_n$, wobei $t'_1, ..., t'_n$ die Eigenschaft (E) haben (*Induktionsvoraussetzung*). Angenommen, der Term t wäre ein echtes Anfangsstück von t', also $t' = t\zeta$. Dann würde t mit f beginnen, und nach Regel (T3) hätte T die Form $t = ft_1...t_n$ für Terme $t_1, ..., t_n$. Dann wäre also

$$\begin{aligned} &ft'_1...t'_n = ft_1...t_n\zeta, \text{ also auch} \\ &t'_1...t'_n = t_1...t_n\zeta. \end{aligned}$$

Daher ist t'_1 Anfangsstück von t_1 oder umgekehrt. Da aber t'_1 die Eigenschaft (E) erfüllt, folgt $t'_1 = t_1$ und somit $t'_2...t'_n = t_2...t_n\zeta$.
n-fache Anwendung dieses Arguments liefert, dass ζ leer ist, im Widerspruch dazu, dass t ein *echtes* Anfangsstück von t' ist.

□

Wir erhalten daraus:

Satz 1.9 (eindeutige Darstellung von Termen und Ausdrücken)**.**

(a) Jeder S-Term ist eine Variable oder eine Konstante oder von der Form $ft_1...t_n$. Im letzteren Falle sind f und $t_1, ..., t_n$ eindeutig bestimmt.

(b) Jeder S-Ausdruck ist von genau einer der Formen $t_1 \equiv t_2$ oder $Rt_1...t_n$ oder $\neg\varphi$ oder $(\varphi \wedge \psi)$ oder $(\varphi \vee \psi)$ oder $(\varphi \longrightarrow \psi)$ oder $(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ oder $\exists x\varphi$ oder $\forall x\varphi$. Dabei sind t_1 und t_2 bzw. $R, t_1, ..., t_n$ bzw. φ bzw. φ und ψ bzw. x und φ eindeutig bestimmt.

Beweis.

(a) Dass ein Term genau eine der drei Gestalten haben muss, ist Bestandteil der Termdefinition. Angenommen, es wäre $ft_1...t_n = f't'_1...t'_m$. Dann ist $f = f'$ und somit $t_1...t_n = t'_1...t'_m$. Also ist t_1 Anfangsstück von t'_1 oder umgekehrt. Nach Lemma 1.8 folgt $t_1 = t'_1$. n-malige Anwendung dieses Arguments liefert $m = n$ und $t_1 = t'_1, ..., t_n = t'_n$.

(b) Nach Definition des Ausdrucks muss jeder Ausdruck eine der genannten Formen haben.

- Fängt ein Ausdruck mit einer Variablen, einem Konstantensymbol oder einem Funktionssymbol, so hat er die Form $t_1 \equiv t_2$. Angenommen $t_1 \equiv t_2 \; = \; t'_1 \equiv t'_2$.
  Dann ist t_1 Anfangsstück von t'_1 oder umgekehrt, also nach Lemma 1.8 $t_1 = t'_1$ und daher $\equiv t_2 \; = \; \equiv t'_2$ (als Zeichenketten!) und sonst $t_1 = t'_2$.
- Ähnliche Argumentation, wenn der Ausdruck mit einem Relationssymbol beginnt (Übung!).
- Beginnt der Ausdruck mit $\neg$, so hat er die Form $\neg\varphi$ für einen Ausdruck φ. Ist $\neg\varphi = \neg\psi$, so auch $\varphi = \psi$.
- Beginnt der Ausdruck mit einer linken Klammer, so hat er die Form $(\varphi * \psi)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$. Ist nun $(\varphi * \psi) = (\varphi' *' \psi')$, so gilt $\varphi * \psi) \; = \; \varphi' *' \psi')$, also ist φ Anfangsstück von φ' oder umgekehrt. Nach Lemma 1.8 b) folgt $\varphi = \varphi'$ und dann auch $*\psi) = *'\psi')$, also $* = *'$ und ähnlich $\psi = \psi'$.
- Beginnt der Ausdruck mit einem Quantor, so argumentiert man ähnlich (Übung!).

□

Anwendung: Induktive Definitionen.

Beispiel 1.10. Wir wollen eine Abbildung var_S definieren, die jedem S-Term t die Menge der in ihm vorkommenden Variablen zuordnet (z.B. $\text{var}_S(fxgyx) = \{x, y\}$, wobei f, g zweistellige Funktionssymbole sind).
Wir definieren var_S induktiv:

(T1) $\text{var}_S(x) := \{x\}$

(T2) $\text{var}_S(c) := \emptyset$

(T3) $\mathrm{var}_S(ft_1...t_n) := \mathrm{var}(t_1) \cup ... \cup \mathrm{var}_S(t_n)$.

Satz 1.9 garantiert dann, dass var_S wohldefiniert ist, weil man nicht auf unterschiedliche Arten zum selben Term gelangen kann.

1.3 Freie und gebundene Variablen

Eine Variable kommt **frei** in einem Ausdruck vor, wenn nicht über sie quantifiziert wird, andernfalls heißt sie **gebunden**. Beispiel:

$$\exists x(Ryz \wedge \forall y(\neg y \equiv x \vee Ryz))$$

Dementsprechend sind die freien Variablen y und z, die gebundenen Variablen sind x und y. Wir sehen: Eine Variable kann in ein und demselben Ausdruck frei *und* gebunden vorkommen!
Wir wollen nun mit Hilfe der Abbildung var_S aus Beispiel 1.10 den Begriff der freien Variablen induktiv darstellen:

Definition 1.11 (Freie Variablen)**.** Die Menge der **freien Variablen** eines S-Ausdruckes ist sein Bild unter der folgendermaßen induktiv definierten Abbildung frei_S:
Seien $t_1, ..., t_n$ S-Terme, R ein n-stelliges Relationssymbol, φ, ψ Ausdrücke, $* \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$ und x eine Variable. Dann sei

- $\mathrm{frei}_S(t_1 \equiv t_2) := \mathrm{var}_S(t_1) \cup \mathrm{var}_S(t_2)$
- $\mathrm{frei}_S(Rt_1...t_n) := \mathrm{var}_S(t_1) \cup ... \cup \mathrm{var}_S(t_n)$
- $\mathrm{frei}_S(\neg\varphi) := \mathrm{frei}_S(\varphi)$
- $\mathrm{frei}_S(\varphi * \psi) := \mathrm{frei}_S(\varphi) \cup \mathrm{frei}_s(\psi)$
- $\mathrm{frei}_S(\exists x\varphi) := \mathrm{frei}_S(\varphi) \setminus \{x\}$ sowie $\mathrm{frei}_S(\forall x\varphi) := \mathrm{frei}_S(\varphi) \setminus \{x\}$.

Mit dieser Definition können wir erneut obigen Ausdruck untersuchen:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{frei}_S(\exists x(Ryz \wedge \forall y(\neg y \equiv x \vee Ryz)))\\
&= \mathrm{frei}_S((Ryz \wedge \forall y(\neg y \equiv x \vee Ryz))) \setminus \{x\}\\
&= (\mathrm{frei}_S(Ryz) \cup \mathrm{frei}_S(\forall y(\neg y \equiv x \vee Ryz))) \setminus \{x\}\\
&= (\{y\} \cup \{z\} \cup \mathrm{frei}_S((\neg y \equiv x \vee Ryz)) \setminus \{y\}) \setminus \{x\}\\
&= (\{y,z\} \cup (\mathrm{frei}_S(\neg y \equiv x) \cup \mathrm{frei}_S(Ryz)) \setminus \{y\}) \setminus \{x\}\\
&= (\{y,z\} \cup (\mathrm{frei}_S(y \equiv x) \cup \{y,z\}) \setminus \{y\})) \setminus \{x\}\\
&= (\{y,z\} \cup (\{x,y,z\} \setminus \{y\})) \setminus \{x\}\\
&= \{x,y,z\} \setminus \{x\} = \{y,z\}.
\end{aligned}$$

Definition 1.12 (Satz)**.** Ein Ausdruck φ mit $\text{frei}_S(\varphi) = \emptyset$ heißt **Satz**.

Achtung: Anders als im mathematischen Sprachgebrauch muss ein Satz nicht „wahr" sein: Zum Beispiel ist $\forall x\ \neg x \equiv x$ ein Satz im logischen Sinne.

2 Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe

Bisher waren Terme und Ausdrücke nur (nach bestimmten Regeln gebildete) Zeichenketten ohne **Bedeutung**. Wir wollen diese Zeichenketten nun endlich **interpretieren** und dadurch mit Bedeutung versehen.

2.1 Strukturen, Belegungen und Interpretationen

Beispiel 2.1.

- $\varphi := \forall x Rxx$ (x Variable, R zweistellige Relation)
  Die Bedeutung (insbesondere der Wahrheitswert!) eines solchen Ausdruckes wird davon abhängen, wie wir R interpretieren und welche Werte wir für x zulassen. Wählen wir etwa als Grundmenge $\mathbb{N}$ und interpretieren R als die kleiner-Relation $<$, so bedeutet $\forall x Rxx$ „Jede natürliche Zahl ist kleiner sich selbst" (falsch)
  Interpretieren wir R als $\leq$, so haben wir „Jede natürliche Zahl ist kleiner oder gleich sich selbst" (wahr).
  Im Allgemeinen hat ein Ausdruck φ also „an sich" keinen Wahrheitswert, sondern dieser hängt von der Interpretation ab.

- $\varphi := v_1 \equiv v_2$.
  Zum Beispiel können wir die Grundmenge $\mathbb{R}$, v_1 als 2 und v_2 als -1 wählen. Dann erhalten wir eine falsche Aussage!
  Wählen wir hingegen v_1 und v_2 beide als -1, so erhalten wir eine wahre Aussage!

Zur Interpretation von Termen und Ausdrücken müssen wir also wählen:

- eine Grundmenge („Träger")
- Funktionen und Relation für alle Funktions- und Relationssymbole
- die Werte der Konstanten und freien Variablen.

Zur Klärung: Ist A eine Menge, so ist eine n-stellige Relation auf A eine Teilmenge von A^n, Beispiele:

- $A = \mathbb{R}$, dann fassen wir die „$<$"-Relation als die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < y\}$ auf;
- $A = \mathbb{N}$, dann ist die einstellige Relation „ist gerade" gegeben als $\{n \in \mathbb{N} : \ \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$;
- Die fünfstellige Relation „sind aufsteigend angeordnet" wäre $\{(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) \in \mathbb{N}^5 : \ n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5\}$.

Ist A eine Menge, so ist eine n-stellige Funktion auf A eine Abbildung $A^n \to A$.
Damit können wir definieren:

Definition 2.2. Eine S**–Struktur** ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$, wobei A eine nichtleere Menge ist (der **Träger** von $\mathfrak{A}$) und $\mathfrak{a}$) eine Abbildung auf S, sodass gilt:

(1) Für jedes n-stellige Relationssymbol R ist $\mathfrak{a}(R)$ eine n-stellige Relation auf A;

(2) Für jedes n-stellige Funktionssymbol f ist $\mathfrak{a}(f)$ eine n-stellige Funktion auf A;

(3) Für jedes Konstantensymbol c ist $\mathfrak{a}(c)$ ein Element von A.

Häufige Schreibweise: $R^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}$ statt $\mathfrak{a}(R), \mathfrak{a}(f), \mathfrak{a}(c)$.

Beispiel 2.3. Betrachte die zwei Sprachen

$$S_{Ar} = \{+.\otimes, 0, 1\}, \qquad S_{Ar}^{<} = \{+.\otimes, 0, 1, <\}.$$

Zwei Beispiele für S_{Ar}–Strukturen wären

$$\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \otimes^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}\} \text{ oder}$$
$$\mathcal{R} = \{\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \otimes^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}\},$$

wobei $+^{\mathbb{N}}, \otimes^{\mathbb{N}}$ die Addition bzw. Multiplikation natürlicher Zahlen und $0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}$ die natürlichen Zahlen Null bzw. Eins sind; entsprechend für $\mathbb{R}$.
Eine $S_{Ar}^{<}$–Struktur ist z.B.

$$\mathcal{N}^{<} = \{\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \otimes^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}\},$$

wobei $<^{\mathbb{N}}$ die kleiner-Relation auf $\mathbb{N}$ bezeichnet.
Man kann aber auch weniger naheliegende (und in der Praxis unbrauchbare) S_{Ar}–Strukturen angeben, zum Beispiel $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \mathfrak{a})$ mit

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}(+) = (n, m \mapsto 3n^2 m),\\
&\mathfrak{a}(\otimes) = (n, m \mapsto |n^2 - m^2|),\\
&\mathfrak{a}(0) = 42,\\
&\mathfrak{a}(1) = 42.
\end{aligned}$$

Dann haben die Symbole $+, \otimes, 0, 1$ natürlich ganz andere Bedeutungen als üblich.

Definition 2.4. Sei $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur. Eine **Belegung** der Variablen $v_0, v_1, ...$ ist eine Abbildung $\beta : \{v_0, v_1, ...\} \to A$.

Definition 2.5. Eine **S–Interpretation** ist ein Paar $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, wobei $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine S-Struktur und β eine Belegung in A ist.

Definition 2.6. Sei β eine Belegung in A, $a \in A$, x eine Variable. Dann ist die Belegung $\beta\frac{a}{x}(y)$ gegeben durch

$$\beta\frac{a}{x}(y) := \begin{cases} a, & \text{falls } y = x \\ \beta(y), & \text{falls } y \neq x. \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S–Interpretation, so ist $\mathfrak{I}\frac{a}{x} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x})$.

Beispiel 2.7. Betrachte wie in Beispiel 2.3 die S_{Ar}–Struktur $\mathcal{N}$ (also die „üblichen" natürlichen Zahlen). Eine naheliegende Belegung für $\{v_0, v_1, ...\}$ ist $\beta v_i := i$ (d.h. $\beta(v_0) = 0, \beta(v_1) = 1$, etc.)
Die Belegung $\beta\frac{42}{v_2}$ wäre dann:

$$\begin{aligned}
&\beta\frac{42}{v_2}(v_0) = 0,\ \beta\frac{42}{v_2}(v_1) = 1,\ \beta\frac{42}{v_2}(v_2) = 42,\\
&\beta\frac{42}{v_2}(v_3) = 3,\ \dots,\ \beta\frac{42}{v_2}(v_{42}) = 42,\ \dots
\end{aligned}$$

Man kann aber auch andere Belegungen wählen, z.B.

$$\beta(v_i) = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Durch eine S–Interpretation erhalten alle Variablen und alle Elemente der Symbolmenge eine Bedeutung. Damit können wir bereits die Bedeutung der S–Terme erfassen:
z.B. $t := +v_3 \otimes v_2 v_5$ hat in der S_{Ar}–Interpretation mit $\mathfrak{A} = \mathcal{N}$ und $\beta v_i = i$ die Bedeutung $3 + 2 \cdot 5$, also 13.

Allgemein:

Definition 2.8 (Interpretation von Termen)**.** Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S–Interpretation. Wir definieren eine Abbildung (die — in etwas missbräuchlicher Notation — ebenfalls mit $\mathfrak{I}$ bezeichnet wird):

$$\mathfrak{I} : \; T^S \to A$$

induktiv durch:

(T1) $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$ (x Variable),

(T2) $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$ (c Konstantensymbol) und

(T3) $\mathfrak{I}(ft_1...t_n) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), ..., \mathfrak{I}(t_n))$ (f n-stelliges Funktionssymbol, $t_1, ..., t_n$ S–Terme).

2.2 Modellbeziehungen

Die Interpretation von **Ausdrücken** erfolgt mit der **Modellbeziehung**: Sei $\mathfrak{I}$ eine S–Interpretation und φ ein S-Ausdruck.

$$„\mathfrak{I} \models \varphi“$$

Lies: „$\mathfrak{I}$ ist Modell für φ“ oder „In $\mathfrak{I}$ gilt φ“ oder „$\mathfrak{I}$ erfüllt φ“ oder „φ gilt in $\mathfrak{I}$“.

Definition 2.9 (Modellbeziehung)**.** Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S–Interpretation. Wir definieren

- $\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$,
- $\mathfrak{I} \models Rt_1...t_n$ genau dann, wenn $(\mathfrak{I}(t_1), ...\mathfrak{I}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$,
- $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ genau dann, wenn nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$,
- $\mathfrak{I} \models \varphi \wedge \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$,

- $\mathfrak{I} \models \varphi \vee \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$,
- $\mathfrak{I} \models \varphi \longrightarrow \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \psi$ oder nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$,
- $\mathfrak{I} \models \varphi \longleftrightarrow \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \psi$ oder nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$ und nicht $\mathfrak{I} \models \psi$.
- $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi$ genau dann, wenn ein $a \in A$ existiert mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.
- $\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$ genau dann, wenn für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

Bemerkungen:

- „und“ und „oder “ sind wie im mathematischen Sprachgebrauch zu verstehen, z.B. ist die Bedeutung von „A oder B“ durch die Wahrheitstafel

A	B	A oder B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

  gegeben.
- Zur Interpretaion von „$\longrightarrow$“ und „$\longleftrightarrow$“: Wahrheitstafel für „wenn ..., dann“ lautet

A	B	wenn A, dann B
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

  also ist „wenn A, dann B“ gleichbedeutend mit „nicht A oder B“. Ähnlich erklärt sich die Interpretation von „$\longleftrightarrow$“.
- Ist die Definition zirkulär, indem wir die logischen Zeichen durch sich selbst erklärt haben? *Nein*, denn wir haben die (zunächst bedeutungslosen) Symbole $\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow, \exists, \forall, \equiv$ in die mathematische „Umgangssprache“ übersetzt. „$\wedge$“ ist nicht das Gleiche wie „und“ (Objekt- vs. Metasprache, siehe gesondertes Video).

Beispiel 2.10 (vgl. Beispiele 2.3, 2.7)**.** Sei wieder $S_{Ar}^{<} = \{+, \otimes, 0, 1, <\}$ und $\mathfrak{I} = (\mathcal{N}, \beta)$, wobei $\mathcal{N}$ das Standardmodell der natürlichen Zahlen und $\beta(v_i) = i$ für $i \in \mathbb{N}$.
Betrachte die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\varphi &:= +v_3 \otimes v_1 v_5 \equiv +v_6 1,\\ \psi &:= \forall v_1 \exists v_2 < v_1 v_2.\end{aligned}$$

Wir untersuchen die Gültigkeit von φ und ψ in $\mathfrak{I}$.

- Für φ gilt:

  $$\begin{array}{ll} \mathfrak{I} \models \varphi & \text{genau dann, wenn} \\ \mathfrak{I}(+v_3 \otimes v_1 v_5) = \mathfrak{I}(+v_6 1) & \text{genau dann, wenn} \\ 8 = 7 & \end{array}$$

  (Im letzten Schritt wurden die Regeln zur Terminterpretation angewendet, vgl. Def. 2.8).
  Da dies nicht der Fall ist, haben wir nicht $\mathfrak{I} \models \varphi$ (schreibe auch $\mathfrak{I} \not\models \varphi$) und damit $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$.

- für ψ gilt:

  $$\begin{array}{ll} \mathfrak{I} \models \psi & \text{genau dann, wenn} \\ \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \mathfrak{I}\frac{n}{v_1} \models \exists v_2 < v_1 v_2 & \text{genau dann, wenn} \\ \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ex. } m \in \mathbb{N}, \text{ sd. } \mathfrak{I}\frac{n}{v_1}\frac{m}{v_2} \models < v_1 v_2 & \text{genau dann, wenn} \\ \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ex. } m \in \mathbb{N}, \text{ sd. } n < m. & \end{array}$$

  Da dies wahr ist, gilt $\mathfrak{I} \models \psi$.

Beobachtung: Die Gültigkeit von ψ hängt nicht von der Belegung β ab (da ψ keine freien Variablen enthält!).

2.3 Die Folgerungsbeziehung

Definition 2.11 (Folgerungsbeziehung)**.** Sei Φ eine Menge von S–Ausdrücken und φ ein S–Ausdruck. Wir definieren

(i) $\mathfrak{I} \models \Phi$ genau dann, wenn für jedes $\psi \in \Phi$ gilt $\mathfrak{I} \models \psi$.

(ii) $\Psi \models \varphi$ genau dann, wenn für jede Interpretation $\mathfrak{I}$, für die $\mathfrak{I} \models \Psi$ auch $\mathfrak{I} \models \varphi$ gilt.

Man sagt im Falle von (ii), dass φ aus Φ **folgt**.

Beispiel: $\Phi = \{v_1 \equiv v_2; v_2 \equiv v_3\}$, $\varphi = \{v_1 \equiv v_3\}$, so ist $\Phi \models \varphi$.

Beweis. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ Interpretation mit $\mathfrak{I} \models v_1 \equiv v_2$ und $\mathfrak{I} \models v_2 \equiv v_3$, d.h. $\beta(v_1) = \beta(v_2)$ und $\beta(v_2) = \beta(v_3)$. Dann gilt auch $\beta(v_1) = \beta(v_3)$, also $\mathfrak{I} \models \varphi$. $\square$

Betrachte nun dasselbe Φ, aber $\psi = v_4 \equiv v_5$.
Betrachte die Beiden Interpretationen $\mathfrak{I}_1 = (\mathcal{N}, \beta_1)$ und $\mathfrak{I}_2 = (\mathcal{N}, \beta_2)$, wobei β_1 und β_2 Belegungen sind mit den Eigenschaften

$$\beta_1(v_1) = \beta_1(v_2) = \beta_1(v_3) = \beta_1(v_4) = \beta_1(v_5)$$

$$\beta_2(v_1) = \beta_2(v_2) = \beta_2(v_3) = \beta_2(v_4) \neq \beta_2(v_5)$$

Dann gilt $\mathfrak{I}_1 \models \Phi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \Phi$, aber $\mathfrak{I}_1 \models \psi$ und *nicht* $\mathfrak{I}_2 \models \psi$.
Wegen $\mathfrak{I}_2 \models \Phi$ und $\mathfrak{I}_2 \not\models \psi$ haben wir *nicht* $\Phi \models \psi$.
Wegen $\mathfrak{I}_1 \models \Phi$ und $\mathfrak{I}_1 \not\models \neg\psi$ haben wir andererseits *nicht* $\Phi \models \psi$.

Also nota bene: $\Phi \not\models \psi$ impliziert nicht, dass $\Phi \models \neg\psi$. (Man könnte sagen, Φ lasse ψ unbestimmt.)

Definition 2.12.

(i) Ein Ausdruck φ heißt **allgemeingültig**, wenn für **jede** Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

(ii) Ein Ausdruck φ heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt mit $\mathfrak{I} \models \varphi$.

(iii) Zwei Ausdrücke φ, ψ heißen **logisch äquivalent**, wenn $\varphi \longleftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist.

Bemerkungen / Beispiele:

- Ist φ allgemeingültig, so schreiben wir $\models \varphi$. Zum beispiel ist für jedes φ:
$$\models (\varphi \vee \neg\varphi) \text{ und } \models (\varphi \longrightarrow \neg\neg\varphi).$$
- $v_1 \equiv v_2$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig. $\neg v_1 \equiv v_1$ ist nicht erfüllbar.

- φ und $\neg\neg\varphi$ sind logisch äquivalent, ebenso $(\varphi \vee \psi)$ und $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (Übung).

- φ und ψ sind logisch äquivalent genau dann, wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$ (genauer müssten wir schreiben: $\{\varphi\} \models \psi$ und $\{\psi\} \models \varphi$.) (Übung).

Man prüft leicht (mit der Definition der Modellbeziehung und Wahrheitstafeln):

- $(\varphi \wedge \psi)$ ist logisch äquivalent zu $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

- $(\varphi \longrightarrow \psi)$ ist logisch äquivalent zu $(\neg\varphi \vee \psi)$,

- $(\varphi \longleftrightarrow \psi)$ ist logisch äquivalent zu $\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

- $\forall x\varphi$ ist logisch äquivalent zu $\neg\exists x\neg\varphi$.

Wir können also $\wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow, \forall$ durch $\neg, \vee, \exists$ ausdrücken, ohne die Bedeutung der jeweiligen Ausdrücke zu verändern.
In Zukunft wird es also genügen, induktive Definitionen und Beweise nur für die Schritte mit $\neg, \vee, \exists$ auszuführen.

Schauen wir zurück zu Beispiel 2.10. Dort hatten wir beobachtet, dass die Gültigkeit von φ nicht von β abhängt, wenn $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$. Wir zeigen jetzt allgemeiner, dass die Gültigkeit eines Ausdruckes nur von der Interpretation der in ihm auftretenden Symbole und freien Variablen abhängt (und nicht etwa von der Interpretation von Symbolen und Variablen, die in φ nicht auftreten):

Lemma 2.13 (Koinzidenzlemma)**.** Seien S_1, S_2 Symbolmengen und $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ eine S_1–Interpretation und $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ eine S_2–Interpretation über demselben Träger, d.h. $A_1 = A_2 = A$. Sei $S = S_1 \cap S_2$.

(i) Sei t ein S–Term. Wenn $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ für alle Symbole und Variablen, die in t auftreten, übereinstimmen, so ist $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.

(ii) Sei φ ein S–Ausdruck. Wenn $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ für alle Symbole, die in φ auftreten, und alle *freien* Variablen von φ übereinstimmen, so ist

$$\mathfrak{I}_1 \models \varphi \quad \text{g.d.w} \quad \mathfrak{I}_2 \models \varphi.$$

Beweis.

(i) Induktion über den Termaufbau:

- $t = x$: Nach Voraussetzung: $\mathfrak{I}_1(t) = \beta_1(x) = \beta_2(x) = \mathfrak{I}_2(t)$.
- $t = c$: Nach Voraussetzung: $\mathfrak{I}_1(t) = c^{\mathfrak{A}_1} = c^{\mathfrak{A}_2} = \mathfrak{I}_2(t)$.
- $t = ft_1...t_n$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1(t) &= f^{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{I}_1(t_1), ..., \mathfrak{I}_1(t_n)) \\ &\overset{\text{Voraussetzung}}{=} f^{\mathfrak{A}_2}(\mathfrak{I}_1(t_1), ..., \mathfrak{I}_1(t_n)) \\ &\overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} f^{\mathfrak{A}_2}(\mathfrak{I}_2(t_1), ..., \mathfrak{I}_2(t_n)) \\ &= \mathfrak{I}_2(t).\end{aligned}$$

(ii) Induktion über den Aufbau der Ausdrücke:

- $\varphi = t_1 \equiv t_2$: $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ g.d.w. $\mathfrak{I}_1(t_1) = \mathfrak{I}_1(t_2)$ g.d.w. (nach (i)) $\mathfrak{I}_2(t_1) = \mathfrak{I}_2(t_2)$ g.d.w. $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.
- $\varphi = Rt_1...t_n$: $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ g.d.w. $(\mathfrak{I}_1(t_1), ..., \mathfrak{I}_1(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}_1}$ g.d.w. (nach (i) und Voraussetzung) $(\mathfrak{I}_2(t_1), ..., \mathfrak{I}_2(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}_2}$ g.d.w. $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.
- $\varphi = \neg\psi$: $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ g.d.w. nicht $\mathfrak{I}_1 \models \psi$ g.d.w. (Induktionsannahme) nicht $\mathfrak{I}_2 \models \psi$ g.d.w. $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.
- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$: $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ g.d.w. $\mathfrak{I}_1 \models \varphi_1$ oder $\mathfrak{I}_1 \models \varphi_2$ g.d.w. (Ind.-Voraussetzung) $\mathfrak{I}_2 \models \varphi_1$ oder $\mathfrak{I}_2 \models \varphi_2$ g.d.w. $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.
- $\varphi = \exists x\psi$: $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ g.d.w. es existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{I}_1\frac{a}{x} \models \psi$ g.d.w.* es ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{I}_2\frac{a}{x} \models \psi$ g.d.w. $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.
  * Man beachte hier: frei$(\psi) \subset$ frei$(\varphi) \cup \{x\}$. Nach Voraussetzung stimmen $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ auf frei(φ) und allen in φ (und damit ψ) auftretenden Symbolen überein. Also stimmen $\mathfrak{I}_1\frac{a}{x}$ und $\mathfrak{I}_2\frac{a}{x}$ auf frei$(\varphi) \cup \{x\} \supset$ frei(ψ) und den in ψ auftretenden Symbolen überein und nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\mathfrak{I}_1\frac{a}{x} \models \psi$ g.d.w. $\mathfrak{I}_2\frac{a}{x} \models \psi$.

□

Einige Konsequenzen:

- Ist φ ein Satz (d.h. frei$(\varphi) = \emptyset$), so hängt seine Gültigkeit nicht von der Belegung β ab, und man kann schreiben $\mathfrak{A} \models \varphi$ (statt $\mathfrak{I} \models \varphi$).
  Entsprechend: Ist Φ eine Menge von Sätzen, so schreibe $\mathfrak{A} \models \Phi$, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$.

- Sei Φ eine Menge von S–Ausdrücken und $S' \supset S$. Dann ist Φ bezüglich S erfüllbar g.d.w. Φ ist bezüglich S' erfüllbar.

  Beweis. Ist Φ bezüglich S' erfüllbar, so existiert S'–Interpretation $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}', \beta')$ mit $\mathfrak{I}' \models \Phi$. Nach Koinzidenzlemma ist dann auch $\mathfrak{I}'|_S = (\mathfrak{A}'|_S, \beta') \models \Phi$ (wir schreiben: $\mathfrak{A}'|_S := (A, \mathfrak{a}|_S)$).
  Ist umgekehrt Φ bezüglich S erfüllbar, dann existiert eine S–Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ mit $\mathfrak{I} \models \Phi$. Erweitere $\mathfrak{A}$ beliebig zu einer S'–Struktur $\mathfrak{A}'$. Dann ist nach Koinzidenzlemma $(\mathfrak{A}', \beta) \models \Phi$. $\square$

2.4 Symbolisierung mathematischer Aussagen

Wir geben einige Beispiele, wie sich mathematische Theorien in Prädikatenlogik erster Stufe schreiben lassen.

(1) **Äquivalenzrelationen:** $S = \{R\}$, R zweistelliges Relationssymbol. Sei $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \forall x Rxx \\ \varphi_2 &= \forall x \forall y (Rxy \longleftrightarrow Ryx) \\ \varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z ((Rxy \land Ryz) \longrightarrow Rxz). \end{aligned}$$

Dann ist z.B. $\Phi \models \psi$ mit

$$\psi = \forall x \forall y (\exists u (Rxu \land Ryu) \longrightarrow \forall z (Rxz \longleftrightarrow Ryz)).$$

(2) **Stetigkeit:** $S = S^<_{Ar} \cup \{f, d\}$, wobei

- $S^<_{Ar} = \{+, \otimes, 0, 1, <\}$,
- f einstelliges Funktionssymbol,
- d zweistelliges Funktionssymbol (steht für die Distanz $|x - y|$).

Setze

$$\varphi = \forall x \forall u (< 0u \longrightarrow \exists v (< 0v \land \forall y (< dxyv \longrightarrow < dfxfyu))).$$

„Für alle x und alle $n > 0$ existiert ein $v > 0$, sodass für alle y, für die $|x - y| < v$, auch $|f(x) - f(y)| < u$.“
Betrachte die Struktur

$$\mathfrak{A} = \{\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \otimes^{\mathbb{R}}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}}, f^{\mathfrak{A}}, d^{\mathfrak{A}}\},$$

wobei $+^{\mathbb{R}}, \otimes^{\mathbb{R}}$ die Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{R}$, $<^{\mathbb{R}}$ die kleiner-Relation auf $\mathbb{R}$, $0^{\mathbb{R}}$ und $1^{\mathbb{R}}$ die reellen Zahlen Null und Eins, $f^{\mathfrak{A}}$ eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $d^{\mathfrak{A}}$ die Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x - y|$ bezeichnen.
Dann ist $\mathfrak{A} \models \varphi$ g.d.w. $f^{\mathfrak{A}}$ stetig.

(3) **Anzahlaussagen:** Sei $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine Struktur.

$\mathfrak{A} \models \exists x \exists y \, \neg x \equiv y$	gdw A enthält mindestens zwei Elemente.
$\mathfrak{A} \models \exists x \forall y \; x \equiv y$	gdw A enthält genau ein Element.
$\mathfrak{A} \models \varphi_{\geq n}$	gdw A enthält mindestens n Elemente,

wobei

$$\varphi_{\geq n} := \exists v_1 \exists v_2 ... \exists v_n (\neg v_1 \equiv v_2 \wedge \neg v_1 \equiv v_3 \wedge ... \wedge \neg v_1 \equiv v_n \\ \wedge \neg v_2 \equiv v_3 \wedge ... \wedge \neg v_{n-1} \equiv v_n).$$

Und zuletzt:

$$\mathfrak{A} \models \{\varphi_{\geq n} \; : \; n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{gdw } A \text{ ist unendlich.}$$

(4) **Körper:** $S = S_{Ar} = \{+, \otimes, 0, 1\}$. Die Körperaxiome lauten:

$$\forall x \forall y \forall z + x + yz \equiv + + xyz$$
$$\forall x \forall y \forall z \otimes x \otimes yz \equiv \otimes \otimes xyz$$
$$\forall x \forall y + xy \equiv +yx$$
$$\forall x \forall y \otimes xy \equiv \otimes yx$$
$$\forall x \exists y + xy \equiv 0$$
$$\forall x (\neg x \equiv 0 \longrightarrow \exists y \otimes xy \equiv 1)$$
$$\forall x + x0 \equiv x$$
$$\forall x \otimes x1 \equiv x$$
$$\neg 0 \equiv 1$$
$$\forall x \forall y \forall z \otimes x + yz \equiv + \otimes xy \otimes xz$$

Die Menge dieser 10 Sätze heiße Φ_K. Dann können wir definieren. Ein **Körper** ist eine S_{Ar}–Struktur $\mathfrak{A}$, für die

$$\mathfrak{A} \models \Phi_K.$$

(5) **Vektorräume:** Problem: Es gibt zwei „Sorten"von Objekten, nämlich Skalare und Vektoren. Mögliche Lösung: Verwende zwei einstellige Relationssymbole $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{V}$, die ausdrücken, dass etwas ein Skalar bzw. ein Vektor ist. Konkret:

$$S_{VR} = \{\mathfrak{K}, \mathfrak{V}, +^K, \otimes^K, 0^K, 1^K, +^V, \otimes^{KV}, 0^V\}$$

(Dabei symbolisiert z.B. $\otimes^K$ die Multiplikation zwischen zwei Skalaren und $\otimes^{KV}$ die zwischen einem Skalar und einem Vektor, 0^K die skalare Null, 0^V den Nullvektor, etc.)
Das Vektorraumaxiom *„für jeden Skalar α und zwei Vektoren v, w gilt* $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$" lässt sich dann formulieren als

$$\forall x \forall y \forall z (((\mathfrak{K}x \wedge \mathfrak{V}y) \wedge \mathfrak{V}z) \longrightarrow \otimes^{KV} x +^V yz \equiv +^V \otimes^{KV} xy \otimes^{KV} xz).$$

(6) **Natürliche Zahlen:** Diese werden üblicherweise durch die **PEANO–Axiome** charakterisiert. Betrachte dazu die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \sigma^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}})$ mit $\sigma^{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$ und $0^{\mathbb{N}}$ die Null. Dann lauten die Axiome von PEANO sinngemäß:

P1) $0^{\mathbb{N}}$ ist kein Wert von $\sigma^{\mathbb{N}}$.

P2) $\sigma^{\mathbb{N}}$ ist injektiv.

P3) **Induktionsaxiom:** Für jede Teilmenge $X \subset \mathbb{N}$ gilt: Ist $0^{\mathbb{N}} \in X$ und folgt aus $n \in X$ stets $\sigma^{\mathbb{N}}(n) \in X$, so ist $X = \mathbb{N}$.

Wie können wir dies symbolisieren? $S = \{\sigma, 0\}$.

P1) $\neg \exists x \sigma x \equiv 0$

P2) $\forall x \forall y (\sigma x \equiv \sigma y \longrightarrow x \equiv y)$

P3) $\forall X((X0 \wedge \forall x(Xx \longrightarrow X\sigma x)) \longrightarrow \forall y Xy)$
Kein zulässiger Ausdruck 1. Stufe, da wir nicht über Relationssymbole quantifizieren dürfen!

Diese Formulierung von P3) ist ein Ausdruck der Prädikatenlogik **2.** Stufe. Man kann zeigen:

Satz (Dedekind). Jedes Modell von P1) – P3) ist zur Struktur $\mathcal{N}$ **isomorph**.

[Zwei S–Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{B})$ heißen **isomorph**, wenn es eine Bijektion $\pi : A \to B$ gibt, sodass

- für jedes n-stellige Relationssymbol R und $a_1, ..., a_n \in A$:
  $R^{\mathfrak{A}} a_1 ... a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) ... \pi(a_n)$
- für jedes n-stellige Funktionssymbol f und $a_1, ..., a_n \in A$:
  $\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), ..., \pi(a_n))$
- für jedes Konstantensymbol c:
  $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.]

Man kann aber auch zeigen: Sei Φ eine Menge von $\{\sigma, 0\}$–Sätzen **1. Stufe**, sodass $\mathcal{N} \models \Phi$. Dann existiert eine $\{\sigma, 0\}$–Struktur $\mathcal{N}'$, sodass $\mathcal{N}' \models \Phi$, aber $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ sind **nicht** isomorph!

Eine **Axiomatisierung** einer Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine Menge Φ von Sätzen, sodass $\mathfrak{B} \models \Phi$ gdw $\mathfrak{B}$ ist zu $\mathfrak{A}$ isomorph.
Es gilt also: Die natürlichen Zahlen sind in Prädikatenlogik 1. Stufe **nicht** axiomatisierbar!

2.5 Substitution

Betrachte den S_{Ar}–Ausdruck

$$\varphi := \exists z + zz \equiv x.$$

In der Struktur $\mathcal{N}$ der natürlichen Zahlen besagt er, dass x gerade sei. Tauschen wir x durch y aus, erhalten wir

$$\varphi \frac{y}{x} := \exists z + zz \equiv y,$$

d.h. „y ist gerade“.
Würden wir allerdings x durch z ersetzen, so erhielten wir

$$\exists z + zz \equiv z$$

mit der Bedeutung „$2z = z$“, also „$z = 0$“.

Das Problem (der Bedeutungsänderung) tritt offenbar deshalb auf, weil das Substitut im Wirkungsbereich eines Quantors steht. Um auszudrücken, dass z gerade sei, könnten wir stattdessen schreiben:

$$\varphi \frac{z}{x} := \exists u + uu \equiv z \quad (\text{oder: } \exists w + ww \equiv z).$$

Zuerst definieren wir aber die Substitution in Termen, bei denen dieses Problem noch nicht auftritt.

Definition 2.14. Seien $x_0, x_1, ..., x_r$ paarweise verschiedene Variablen und $t_0, ..., t_r$ S–Terme.

(T1) $x\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} := \begin{cases} x & \text{falls } x \neq x_0, ..., x \neq x_r \\ t_1 & \text{falls } x = x_i \end{cases}$

(T2) $c\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} := c$

(T3) $[ft'_1...t'_n]\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} := ft'_1\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}...t'_n\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}$.

Beispiel: Sei f zweistellig, g einstellig:

$$[fxgz]\frac{gy}{x} = fx\frac{gy}{x}[gz]\frac{gy}{x} = fgygz\frac{gy}{x} = fgygz.$$

Definition 2.15.

(A1) $[t'_1 \equiv t'_2]\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} := t'_1\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} \equiv t'_2\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}$

(A2) $[Rt'_1...t'_n]\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} := Rt'_1\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}...t'_n\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}$

(A3) $[\neg\varphi]\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}]$

(A4) $(\varphi \vee \psi)\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} := (\varphi\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} \vee \psi\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r})$

(A5) Seien $x_{i_1}, ..., x_{i_s}$ $(i_1 < ... < i_s)$ diejenigen der Variablen $x_1, ...x_r$, für die $x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi)$ und $x_i \neq t_i$. Dann setze:

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} := \exists u[\varphi\frac{t_{i_1}...t_{i_s}}{x_{i_1}...x_{i_s}}\frac{u}{x}],$$

wobei $u := x$, falls x nicht in $t_{i_1}, ..., t_{i_s}$ vorkommt, anderenfalls die erste (gemäß Abzählung der Variablen) Variable, die nicht in $t_{i_1}, ..., t_{i_s}, \varphi$ vorkommt.

Beispiele.

i) $[\exists v_0 + v_0v_0 \equiv v_1]\frac{v_0}{v_1} = \exists v_2 + v_2v_2 \equiv v_0$.

ii) Seien P und f zweistellig:

$$[\exists v_0Pv_0fv_1v_2]\frac{v_4}{v_0}\frac{fv_1v_1}{v_2} = \exists v_0[Pv_0fv_1v_2\frac{fv_1v_1}{v_2}\frac{v_0}{v_0}] = \exists v_0Pv_0f_v1fv_1v_1.$$

iii) $[\exists v_0 Pv_0 f v_1 v_2]\frac{v_0\ v_2\ v_4}{v_1\ v_2\ v_0} = \exists v_3[Pv_0 f v_1 v_2 \frac{v_0\ v_3}{v_1\ v_0}] = \exists v_3 Pv_3 f_v 0 v_2.$

Bisher haben wir nur die Syntax der Substitution festgelegt. Das nächste Lemma zeigt, dass die Bedeutung des substituierten Ausdruckes der Bedeutung des ursprünglichen Ausdruckes entspricht, wenn man die Bedeutungen der ausgetauschten Terme jeweils ersetzt.

Erinnerung: Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine S–Interpretation und $a_0, ..., a_r \in A$, so ist:

$$\mathfrak{I}\frac{a_0...a_r}{x_0...x_r} = (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_0...a_r}{x_0...x_r}) \text{ mit}$$
$$\beta\frac{a_0...a_r}{x_0...x_r}(x) = \begin{cases} \beta(x), & \text{falls } x \neq x_0, ..., x \neq x_r \\ a_i & \text{falls } x = x_i. \end{cases}$$

Lemma 2.16 (Substitutionslemma)**.**

(a) Sei t ein S–Term, so ist

$$\mathfrak{I}\left(t\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(t).$$

(b) Sei φ ein S–Ausdruck, so ist

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_o...x_r} \models \varphi.$$

Beweis.

(a) (T1) Fall 1: Sei $x \neq x_0, ..., x \neq x_r$. Dann ist

$$\mathfrak{I}\left(x\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right) = \mathfrak{I}(x) = \beta(x) = \beta\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(x) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(x).$$

Fall 2: $x = x_i$. Dann ist

$$\mathfrak{I}\left(x\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right) = \mathfrak{I}(t_i) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(x).$$

(T2) Es ist

$$\mathfrak{I}\left(c\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right) = \mathfrak{I}(c) = c^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(c).$$

(T3) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}\left(ft'_1...t'_n\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right) &= \mathfrak{I}\left(ft'_1\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}...t'_n\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right)\\
&= f^{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{I}\left(t'_1\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right),...,\mathfrak{I}\left(t'_n\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right)\right)\\
&\overset{\text{Ind.-Vor}}{=} f^{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{I}\tfrac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(t'_1),...,\mathfrak{I}\tfrac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(t'_n)\right)\\
&= \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(ft'_1...t'_n)
\end{aligned}$$

(b) (A1) Es ist

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I}\models[t'_1\equiv t'_2]\frac{t_1...t_r}{x_0...x_r} \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I}\models t'_1\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\equiv t'_2\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I}\left(t'_1\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right)=\mathfrak{I}\left(t'_2\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right) \qquad \text{gdw (a)}\\
&\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(t'_1)=\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(t'_2) \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_o...x_r}\models t'_1\equiv t'_2.
\end{aligned}$$

(A2) Es ist

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I}\models Rt'_1...t'_n\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I}\models Rt'_1\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}...t'_n\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} \qquad \text{gdw}\\
&\left(\mathfrak{I}\left(t'_1\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right),...,\mathfrak{I}\left(t'_n\tfrac{t_0...t_r}{x_0...x_r}\right)\right)\in R^{\mathfrak{A}} \qquad \text{gdw (a)}\\
&\left(\mathfrak{I}\tfrac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(t'_1),...,\mathfrak{I}\tfrac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}(t'_n)\right)\in R^{\mathfrak{A}} \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r}\models Rt'_1...t'_n.
\end{aligned}$$

(A3) Es ist

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I} \models [\neg\varphi]\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I} \models \neg[\varphi\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r}] \qquad \text{gdw}\\
&\text{nicht } \mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0...t_r}{x_0...x_r} \qquad \text{gdw (Ind-Vor.)}\\
&\text{nicht } \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r} \models \varphi \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r} \models \neg\varphi.
\end{aligned}$$

(A4) Ähnlich wie (A3).

(A5) Seien wie in Def. 2.15 $x_{i_1}, ...x_{i_s}$ die Variablen mit $x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi)$ und $x_i \neq t_i$, und wähle u wie in Def. 2.15. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I} \models [\exists x\varphi]\frac{t_1...t_r}{x_0...x_r} \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I} \models \exists u[\varphi\frac{t_{i_1}...t_{i_s}}{x_{i_1}...x_{i_s}}\frac{u}{x}] \qquad \text{gdw}\\
&\text{es gibt } a \in A \text{ mit } \mathfrak{I}\frac{a}{u} \models \varphi\frac{t_{i_1}...t_{i_s}}{x_{i_1}...x_{i_s}}\frac{u}{x} \qquad \text{gdw (Ind-Vor.)}\\
&\text{es gibt } a \in A \text{ mit } [\mathfrak{I}\frac{a}{u}]\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{u}(t_{i_1})...\mathfrak{I}\frac{a}{u}(t_{i_s})}{x_{i_1}...x_{i_s}}\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{u}(u)}{x} \models \varphi \qquad \text{gdw}\\
&\mathfrak{I}\frac{a}{u}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1})....\mathfrak{I}(t_{i_s})}{x_{i_1}...x_{i_s}}\frac{a}{x} \models \varphi
\end{aligned}$$

(beachte: u kommt in $t_{i_1}, ...t_{i_s}$ nicht vor,
daher ist das Koinzidenzlemma anwendbar) gdw

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1})...\mathfrak{I}(t_{i_s})}{x_{i_1}...x_{i_s}}\frac{a}{x} \models \varphi$$

da $u = x$ oder u kommt in φ nicht vor - Koinzidenz! gdw

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_{i_1})...\mathfrak{I}(t_{i_s}}{x_{i_1}...x_{i_s}} \models \exists x\varphi \qquad \text{gdw}$$

$$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0)...\mathfrak{I}(t_r)}{x_0...x_r} \models \exists x\varphi$$

(Koinzidenzlemma, dann für $y \in \{x_1, ...x_r\} \setminus \{x_{i_1}, ...x_{i_s}\}$ ist $y \notin \text{frei}(\exists x\varphi)$ oder $y = x_i$ mit $x_i = t_i$.)

□

Lemma 2.17. Sei $\text{frei}(\varphi) \subset \{x_0, ...x_r\}$, und $c_0, c_1, ..., c_r$ Konstantensymbole. Dann ist $\varphi\frac{c_0...c_r}{x_0...x_r}$ ein Satz.

Beweis. durch Induktion über den Aufbau (Übung). □

3 Ableitungen im Sequenzenkalkül

Wir formalisieren in diesem Kapitel den Beweisbegriff: In Kapitel 1 haben wir Ausdrücke als spezielle Zeichenketten über einem gegebenen Alphabet definiert. In Kapitel 2 haben wir gesehen, wie solche Zeichenketten mathematisch interpretiert werden können. Wir geben nun einen **Kalkül** an, also eine Menge von Regeln, mit denen Zeichenketten manipuliert werden können. Zum Beispiel die Regel

$$\frac{\varphi}{(\varphi \vee \psi)},$$

die es erlaubt, vom Ausdruck φ auf den Ausdruck $(\varphi \vee \psi)$ überzugehen. Wir können dies wie folgt interpretieren: Von „φ" darf man auf „φ oder ψ" schließen.

*N.B.: Es handelt sich um **rein syntaktische** Operationen.*

Definition 3.1. Eine **Sequenz** ist eine endliche, nichtleere Aneinanderreihung von Ausdrücken, etwa

$$\varphi_1\varphi_2...\varphi_n\varphi.$$

Der letzte Ausdruck φ heißt (das) **Sukzedens** der Sequenz, die Zeichenkette $\varphi_1 ... \varphi_n$ heißt **Antezedens** der Sequenz. Beachte, dass das Antezedens leer sein kann.

Aus Satz 1.9 wissen wir, dass die Sequenz $\varphi_1 ... \varphi_n \varphi$ eindeutig festlegt.
Für irgendeine (evtl. leere) Aneinanderreihung von Ausdrücken schreiben wir kurz Γ, also z.B. $\Gamma = \varphi_1 ... \varphi_n$.

3.1 Der GENTZEN–Kalkül

- **Antezedensregel**

$$(\text{Ant}) \quad \frac{\Gamma\varphi}{\Gamma'\varphi}, \quad \text{falls} \quad \Gamma \subset \Gamma'$$

- **Voraussetzungsregel**

$$(\text{Vor}) \quad \frac{}{\Gamma\varphi}, \quad \text{falls } \varphi \text{ in } \Gamma \text{ enthalten ist.}$$

- **Fallunterscheidungsregel**

$$(\text{FU}) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

- **Widerspruchsregel**

$$(\text{Wid}) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma & \neg\psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \neg\varphi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$

- $\vee$**–Einführung im Antezedens**

$$(\vee\text{A}) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi \\ \hline \Gamma & (\varphi \vee \psi) & \chi \end{array}$$

- $\vee$**–Einführung im Sukzedens**

$$(\vee\text{S}) \quad \text{a)} \ \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi)}, \quad \text{b)} \ \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\psi \vee \varphi)}$$

- **∃–Einführung im Sukzedens**

$$(\exists S)\ \frac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$$

- **∃–Einführung im Antezedens**

$$(\exists A)\ \frac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi} \qquad \text{falls } y \text{ nicht frei in } \Gamma\ \exists x\varphi\ \psi$$

- **Reflexivitätsregel der Gleichheit**

$$(\equiv)\ \frac{}{t \equiv t}$$

- **Substitutionsregel der Gleichheit**

$$(\mathrm{Sub})\ \frac{\Gamma \qquad\qquad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t \equiv t' \quad \varphi\frac{t'}{x}}$$

Definition 3.2. Eine Sequenz $\Gamma\varphi$ heißt (im angegebenen Kalkül) **ableitbar**, wenn $\Gamma\varphi$ durch endlichmalige Anwendung der angegebenen Regeln gewonnen werden kann. Wir schreiben dann

$$\vdash \Gamma\varphi.$$

Ist Φ eine Menge von Ausdrücken, so heißt φ aus Φ **ableitbar** (oder **formal beweisbar**), wenn es endlich viele $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Phi$ gibt mit

$$\vdash \varphi_1 ... \varphi_n \varphi.$$

Wir schreiben dann $\Phi \vdash \varphi$.

Wir geben einige **Beispiele** für weitere Regeln, die sich aus unserem Kalkül ableiten lassen:

- **Tertium non datur:**

$$(\mathrm{TND})\ \frac{}{(\varphi \vee \neg\varphi)}$$

Ableitung:

1. $\varphi \quad \varphi$ (Vor)
2. $\varphi \quad (\varphi \vee \neg\varphi)$ ($\vee$S) auf 1.
3. $\neg\varphi \quad \neg\varphi$ (Vor)
4. $\neg\varphi \quad (\varphi \vee \neg\varphi)$ ($\vee$S) auf 3.
5. $(\varphi \vee \neg\varphi)$ (FU) auf 2., 4.

- **Modifizierte Widerspruchsregel:**

$$(\text{Wid}')\quad \frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \psi \\ \Gamma & \neg\psi\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \varphi\end{array}} \qquad \text{„ex falso quodlibet“}$$

Ableitung:

1. $\Gamma \quad\quad \psi$ (Prämisse)
2. $\Gamma \quad\quad \neg\psi$ (Prämisse)
3. $\Gamma \quad \neg\varphi \quad \psi$ (Ant) auf 1.
4. $\Gamma \quad \neg\varphi \quad \neg\psi$ (Ant) auf 2.
5. $\Gamma \quad \varphi$ (Wid) auf 3., 4.

- **Kettenschlussregel:**

$$(\text{KS})\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \varphi & \\ \Gamma & \varphi & \psi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \psi\end{array}}$$

Ableitung:

1. $\Gamma \quad \varphi$ (Prämisse)
2. $\Gamma \quad \varphi \quad \psi$ (Prämisse)
3. $\Gamma \; \neg\varphi \quad \psi$ (Ant) auf 1.
4. $\Gamma \; \neg\varphi \; \neg\varphi$ (Vor)
5. $\Gamma \; \neg\varphi \quad \psi$ (Wid′) auf 3.,4.
6. $\Gamma \quad\quad \psi$ (FU) auf 2.,5.

- **Kontrapositionen:**

$$(\text{KP})\quad \frac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \quad \neg\varphi},\quad \frac{\Gamma \quad \neg\varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \quad \varphi},\quad \frac{\Gamma \quad \varphi \quad \neg\psi}{\Gamma \quad \psi \quad \neg\varphi},\quad \frac{\Gamma \quad \neg\varphi \quad \neg\psi}{\Gamma \quad \psi \quad \varphi}.$$

Ableitung der ersten Regel:

1. $\Gamma \quad \varphi \quad \psi$ (Prämisse)
2. $\Gamma \quad \neg\psi \quad \varphi \quad \neg\psi$ (Vor)
3. $\Gamma \quad \neg\psi \quad \varphi \quad \psi$ (Ant) auf 1.
4. $\Gamma \quad \neg\psi \quad \varphi \quad \neg\varphi$ (Wid′) auf 2., 3.
5. $\Gamma \quad \neg\psi \quad \neg\varphi \quad \neg\varphi$ (Vor)
6. $\Gamma \quad \neg\psi \quad \neg\varphi$ (FU) auf 4., 5.

- **Modus ponens:**

$$\frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \varphi \\ \Gamma & (\neg\varphi \vee \psi)\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \psi\end{array}}$$

Mann kann $(\neg\varphi \vee \psi)$ auch schreiben als $(\varphi \longrightarrow \psi)$.
Ableitung:

1. $\Gamma \quad \varphi$ (Prämisse)
2. $\Gamma \quad (\neg\varphi \vee \psi)$ (Prämisse)
3. $\Gamma \quad \neg\varphi \quad \neg\varphi$ (Vor)
4. $\Gamma \quad \neg\varphi \quad \varphi$ (Ant) auf 1.
5. $\Gamma \quad \neg\varphi \quad \psi$ (Wid′) auf 3., 4.
6. $\Gamma \quad \psi \quad \psi$ (Vor)
7. $\Gamma \quad (\neg\varphi \vee \psi) \quad \psi$ ($\vee$A) auf 5., 6.
8. $\Gamma \quad \psi$ (KS) auf 2., 7.

- **Zwei Regeln für $\exists$:**

a) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$ b) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi}$, falls x *nicht* frei in $\Gamma\psi$.

  - Zu a): Dies ist ein Spezialfall von ($\exists$S), wenn man $t = x$ setzt und $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$ beachtet.
  - Zu b): Spezialfall von ($\exists$A), wenn man $y = x$ wählt.

- **weitere Gleichheitsregeln:**

$$\frac{\Gamma \quad t_1 \equiv t_2}{\Gamma \quad t_2 \equiv t_1}$$

Ableitung:

1. $\Gamma \quad t_1 \equiv t_2$ (Prämisse)
2. $ \quad t_1 \equiv t_2$ $(\equiv)$
3. $\Gamma \quad t_1 \equiv t_1$ (Ant) auf 2.
4. $\Gamma \quad t_1 \equiv t_2 \quad t_2 \equiv t_1$ (Sub) auf 3., denn $t_1 \equiv t_1 = [x \equiv t_1]\frac{t_1}{x}$
5. $\Gamma \quad t_2 \equiv t_1$ (KS) auf 1., 4.

$$\begin{array}{ll} \Gamma & t_1 \equiv t_2 \\ \Gamma & t_2 \equiv t_3 \\ \hline \Gamma & t_1 \equiv t_3 \end{array}$$

Ableitung:

1. $\Gamma \quad t_1 \equiv t_2$ (Prämisse)
2. $\Gamma \quad t_2 \equiv t_3$ (Prämisse)
3. $\Gamma \quad t_2 \equiv t_3 \quad t_1 \equiv t_3$ (Sub) auf 1., denn $t_1 \equiv t_2 = [t_1 \equiv x]\frac{t_2}{x}$
4. $\Gamma \quad t_1 \equiv t_3$ (KS) auf 2., 3.

Sei R ein n-stelliges Relationssymbol, f ein n-stelliges Funktionssymbol:

$$\begin{array}{ll} \Gamma & t_1 \equiv t_1' \\ & \vdots \\ \Gamma & t_n \equiv t_n' \\ \Gamma & Rt_1...t_n \\ \hline \Gamma & Rt_1'...t_n' \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ll} \Gamma & t_1 \equiv t_1' \\ & \vdots \\ \Gamma & t_n \equiv t_n' \\ \hline \Gamma & ft_1...t_n \equiv ft_1'...t_n' \end{array}$$

Wir verzichten auf die Ableitung.

Es stellt sich eine wichtige Frage: Warum sind die Regeln unseres Kalküls „richtig“? Zunächst sind sie ja willkürlich vorgegeben — wir hätten also auch eine offensichtlich „falsche“ Regel wie

$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \hline \Gamma & \neg\varphi \end{array}$$

vorgeben können. Wir werden durch Folgendes auch die $(\exists A)$-Regel, die als einzige nicht unmittelbar einleuchtend ist, besser verstehen.

3.2 Korrektheit

Erinnerung: Eine **Sequenz** ist eine nichtleere Kette von Ausdrücken $\Gamma\ \varphi$ — Γ: das Antezedens, φ: das Sukzedens. Sie heißt **ableitbar**, wenn sie aus endlich vielen Anwendungen unseres Kalküls hervorgeht. Schreibe $\vdash\ \Gamma\ \varphi$. Ist Φ eine Menge von Ausdrücken und φ ein weiterer Ausdruck, so schreiben wir $\Phi\ \vdash\ \varphi$, wenn es endlich viele $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Phi$ gibt mit $\vdash\ \varphi_1...\varphi_n\varphi$.
Beispiele waren im vorherigen Abschnitt exemplarisch:

- $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$,
- $\{t_1 \equiv t_2, t_2 \equiv t_3\} \vdash t_1 \equiv t_3$,
- $\{\varphi, \varphi \longrightarrow \psi\} \vdash \psi$.

Frage: Wie ist die Beziehung zwischen $\Phi \models \varphi$ *(Folgerung, semantisch)* und $\Phi \vdash \varphi$ *(Ableitung, syntaktisch)*?

Antwort: $\Phi \models \varphi$ **gdw** $\Phi \vdash \varphi$.
„$\Leftarrow$“: GÖDELscher Vollständigkeitssatz (später!)
„$\Rightarrow$“: Korrektheit des Kalküls: Man kann aus dem Antezedens nur Audsdrücke ableiten, die tatsächlich aus ihm folgen.

Definition 3.3 (Korrektheit)**.** Eine Sequenz $\Gamma\varphi$ heißt **korrekt**, wenn

$$\{\psi\ :\ \psi \text{ ist Glied von } \Gamma\} \models \varphi.$$

Um Korrektheit nachzuweisen, muss man also prüfen, dass jedes Modell von Γ auch Modell von φ ist.

Satz 3.4. Der GENTZEN–Kalkül aus Abschnitt 3.1 ist korrekt. [D.h.: Wenn die Sequenzen der Voraussetzungen korrekt sind, so auch die Schlussfolgerung.]

Beweis. Nur exemplarisch für einige Regeln.

$$(\text{Ant})\quad \frac{\Gamma\varphi}{\Gamma'\varphi},\quad \text{falls}\quad \Gamma \subset \Gamma'$$

ist korrekt: Sei nämlich $\Gamma\varphi$ korrekt und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma'$. Wegen $\Gamma' \supset \Gamma$ folgt insbesondere $\mathfrak{I} \models \Gamma$. Wegen Korrektheit von $\Gamma\varphi$ folgt dann auch $\mathfrak{I} \models \varphi$.

$$(\text{FU})\quad \begin{array}{ccc} \Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

ist korrekt: Seien nämlich $\Gamma\varphi\psi$ und $\Gamma\neg\varphi\psi$ beide korrekt und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma$. Falls $\mathfrak{I} \models \varphi$, so folgt $\mathfrak{I} \models \psi$ aus der Korrektheit von $\Gamma\varphi\psi$. Falls dagegen *nicht* $\mathfrak{I} \models \varphi$, so gilt (nach Definition der Modellbeziehung, Def. 2.9) $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$, also nach Korrektheit von $\Gamma\neg\varphi\psi$ auch $\mathfrak{I} \models \psi$.

$$(\exists\text{A})\ \frac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi} \qquad \text{falls } y \text{ nicht frei in } \Gamma\ \exists x\varphi\ \psi$$

ist korrekt: Sei $\Gamma\varphi\frac{y}{x}\psi$ korrekt und $\mathfrak{I}$ eine interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma\exists x\varphi$. Wir müssen zeigen $\mathfrak{I} \models \psi$.
Wegen $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$ existiert (nach Def. 2.9) ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$. Es gilt sogar $(\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{a}{x} \models \varphi$, denn: Falls $x = y$, ist $(\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{a}{x} = \mathfrak{I}\frac{a}{x}$; falls aber $x \neq y$, so ist $y \notin \text{frei}(\varphi)$ nach Voraussetzung, und wir können das Koinzidenzlemma 2.13 verwenden.
Nun können wir schreiben $a = \mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)$ und somit

$$(\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi.$$

Nach Substitutionslemma 2.16b) folgt

$$\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x} \tag{1}$$

Wegen $\mathfrak{I} \models \Gamma$ und $y \notin \text{frei}(\Gamma)$ haben wir nach Koinzidenzlemma $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi$, und mit (1) und der Korrektheit von $\Gamma\varphi\frac{y}{x}\psi$ folgt $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi$. Da schließlich $y \notin \text{frei}(\psi)$, gilt wiederum nach dem Koinzidenzlemma $\mathfrak{I} \models \psi$ wie gewünscht.

$$(\text{Sub})\ \frac{\Gamma \qquad\qquad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t \equiv t' \quad \varphi\frac{t'}{x}}$$

ist korrekt: Sei $\Gamma\varphi\frac{t}{x}$ korrekt und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma t \equiv t'$. Da $\mathfrak{I} \models \Gamma$, haben wir $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x}$, also nach Substitutionslemma $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \models \varphi$. Da $\mathfrak{I} \models t \equiv t'$, ist $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t')$, also folgt $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t')}{x} \models \varphi$, und mit Substitutionslamma schließlich $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t'}{x}$. $\square$

Bemerkung: Die Bedingung $y \notin \text{frei}(\Gamma\exists x\varphi\psi)$ ist notwendig für die Korrektheit der Regel $(\exists\text{A})$. Betrachte nämlich die Sequenz

$$[x \equiv fy]\,\frac{y}{x}\,y \equiv fy,$$

die wegen $[x \equiv fy]\frac{y}{x} = y \equiv fy$ korrekt ist. Würden wir nun $(\exists\text{A})$ anwenden mit $\varphi = x \equiv fy$ und $\psi = y \equiv fy$ (was wir ja nicht dürfen, da $y \in \text{frei}(\exists x \varphi \psi)$!), so würden wir die Sequenz $\exists x\; x \equiv fy\; y \equiv fy$ erhalten, die **inkorrekt** ist. [Betrachte z.B. eine Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $A = \mathbb{N}$. $\mathfrak{I}(y) = 1$, $f^{\mathfrak{A}} = (n \mapsto 2n)$, so ist $\mathfrak{I} \models \exists x\; x \equiv fy$ (da $2 = 2 \cdot 1$), aber **nicht** $\mathfrak{I} \models y \equiv fy$ (da $1 \neq 2 \cdot 1$).]

Es folgt sofort aus Satz 3.4:
Ist Φ eine Menge von Ausdrücken und φ ein weiterer Ausdruck, so gilt:

$$\Phi \vdash \varphi \quad \text{impliziert} \quad \Phi \models \varphi.$$

3.3 Widerspruchsfreiheit

Definition 3.5 (Widerspruchsfreiheit)**.** Sei Φ eine Menge von S–Ausdrücken. Dann heißt Φ **widerspruchsfrei**, wenn es keinen S–Ausdruck φ gibt mit $\Phi \vdash \varphi$ UND $\Phi \vdash \neg\varphi$. Schreibe in diesem Fall $\text{Wf}(\Phi)$.
Φ heißt **widerspruchsvoll** ($\text{Wv}(\Phi)$), wenn Φ nicht widerspruchsfrei ist.

Lemma 3.6. Φ ist widerspruchsvoll genau dann, wenn für jeden S–Ausdruck φ gilt: $\Phi \vdash \varphi$.

Beweis. Wenn für jedes φ gilt $\Phi \vdash \varphi$, so ist $\Phi \vdash \varphi$ für irgendein φ, aber auch $\Phi \vdash \neg\varphi$ für irgendein φ, aber auch $\Phi \vdash \neg\varphi$. Daher ist $\text{Wv}(\Phi)$. Sei nun $\text{Wv}(\Phi)$ und ψ ein Ausdruck mit $\Phi \vdash \psi$ und $\Phi \vdash \neg\psi$. Sei φ beliebig.
Seien $\Gamma_1 = \varphi_1 ... \varphi_n$ und $\Gamma_2 = \varphi'_1 ... \varphi'_m$ so, dass $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi'_1, ..., \varphi'_m \in \Phi$ und $\vdash \Gamma_1 \psi$ sowie $\vdash \Gamma_2 \neg\psi$. Dann können wir die Sequenzen $\Gamma_1 \psi$ und $\Gamma_2 \neg\psi$ als Prämissen verwenden und erhalten folgende Ableitung:

1.	Γ_1		ψ	(Prämisse)
2.	Γ_2		$\neg\psi$	(Prämisse)
3.	Γ_1	Γ_2	ψ	(Ant) auf 1.
4.	Γ_1	Γ_2	$\neg\psi$	(Ant) auf 2.
5.	Γ_1	Γ_2	φ	(Wid′) auf 3., 4.,

also $\Phi \vdash \varphi$. □

Insbesondere gilt: $\mathrm{Wf}(\Phi)$ genau dann, wenn ein Ausdruck existiert, der **nicht** aus Φ ableitbar ist.

Da nach Definition $\Phi \vdash \varphi$ genau dann, wenn $\vdash \varphi_1 ... \varphi_n \varphi$ für endlich viele $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Phi$, erhalten wird

Lemma 3.7. $\mathrm{Wf}(\Phi)$ genau dann, wenn $\mathrm{Wf}(\Phi_0)$ für alle **endlichen** $\Phi_0 \subset \Phi$.

Beweis. Sei $\mathrm{Wf}(\Phi)$, dann existiert φ, sodass **nicht** $\Phi \vdash \varphi$. Dann gilt insbesondere **nicht** $\Phi_0 \vdash \varphi$ für jedes $\Phi_0 \subset \Phi$.
Ist aber $\mathrm{Wv}(\Phi)$, so sei φ dergestalt gewählt, dass $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$. Nach Vorbemerkung zu diesem Lemma gibt es dann **endliche** $\Phi_0, \Phi_0' \subset \Phi$ mit $\Phi_0 \vdash \varphi$, $\Phi_0' \vdash \neg\varphi$. Dann ist $\Phi_0 \cup \Phi_0' \subset \Phi$ endlich und widerspruchsvoll. □

Das folgende Lemma schlägt eine Brücke zwischen Syntax ($\vdash$) und Semantik ($\models$):

Lemma 3.8. Jede erfüllbare Ausdrucksmenge ist widerspruchsfrei.

Erinnerung: Φ heißt **erfüllbar**, wenn es ein Modell für Φ gibt, d.h. wenn eine Interpretation $\mathfrak{I}$ existiert mit $\mathfrak{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Beweis von Lemma 3.8. Angenommen, Φ ist widerspruchsvoll. Dann gibt es ein φ mit $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$. Wäre $\mathfrak{I}$ ein Modell von Φ, so hätten wir aufgrund der Korrektheit des Kalküls (Satz 3.4)

$$\mathfrak{I} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathfrak{I} \models \neg\varphi,$$

also

$$\mathfrak{I} \models \varphi \quad \text{und } \textbf{nicht} \quad \mathfrak{I} \models \varphi,$$

Widerspruch! Also kann kein Modell für Φ existieren, d.h. Φ ist nicht erfüllbar. □

Lemma 3.9. Für eine Menge Φ von S–Ausdrücken und einen S–Ausdruck φ gilt:

(a) $\Phi \vdash \varphi$ genau dann, wenn $\mathrm{Wv}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$.

(b) $\Phi \vdash \neg\varphi$ genau dann, wenn $\mathrm{Wv}(\Phi \cup \{\varphi\})$.

(c) Wenn $\mathrm{Wf}(\Phi)$, so folgt $\mathrm{Wf}(\Phi \cup \{\varphi\})$ oder $\mathrm{Wf}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$.

Beweis.

(a) Ist $\Phi \vdash \varphi$, so nach (Ant) auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. Andererseits ist nach (Vor) auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$. Damit ist $\mathrm{Wv}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$.
Sei umgekehrt $\mathrm{Wv}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$. Nach Lemma 3.6 ist dann insbesondere $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$, d.h. es gibt ein $\Gamma \subset \Phi$ mit $\vdash \Gamma\neg\varphi\varphi$. Wir erhalten folgende Ableitung:

1.	Γ	$\neg\varphi$	φ	(Prämisse)
2.	Γ	φ	φ	(Vor)
3.	Γ		φ	(FU) auf 1., 2.

und daher $\Phi \vdash \varphi$.

(b) Vertausche im Beweis von (a) die Rollen von φ und $\neg\varphi$.

(c) Angenommen $\mathrm{Wf}(\Phi)$, aber $\mathrm{Wv}(\Phi \cup \{\varphi\})$. Dann müssen wir zeigen $\mathrm{Wf}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$. Mit der Bemerkung nach Beweis von Lemma 3.6 gibt es ein ψ mit *nicht* $\Phi \vdash \psi$, aber (Lemma 3.6)

$$\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Angenommen, es gälte $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$. Dann gäbe es $\Gamma \subset \Phi$ mit
$\vdash \Gamma\varphi\psi$ und
$\vdash \Gamma\neg\varphi\psi$, also nach (FU) auch
$\vdash \Gamma\psi$ und damit $\Phi \vdash \psi$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist *nicht* $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$, und nach Lemma 3.6 folgt $\mathrm{Wf}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$.

□

In Kapitel 3 haben wir bisher stets eine feste Symbolmenge S zugrundegelegt und diese in der notation meist ignoriert. Beachte aber, dass die Ableitbarkeit potentiell von der Wahl von S abhängen könnte: Es ist ja denkbar, dass für zwei Symbolmengen $S \subset S'$ eine S–Ausdrucksmenge Φ und ein S–Ausdruck φ existieren, sodass $\Phi \vdash_{S'} \varphi$ [d.h. es gibt $\Gamma \subset \Phi$ und eine aus S'–Ausdrücken bestehende Ableitung an deren Ende $\Gamma\varphi$ steht], aber *nicht* $\Phi \vdash_S \varphi$ — d.h., um φ aus Φ abzuleiten, müsste man S'–Ausdrücke verwenden, die während der Ableitung wieder eliminiert werden (z.B. durch (Wid) oder (FU)). Wir notieren deshalb im Zweifel

$$\Phi \vdash_S \varphi,\ \mathrm{Wf}_S(\Phi),\ \mathrm{Wv}_S(\Phi).$$

Lemma 3.10. Es seien abzählbar viele Synbolmengen $S_0, S_1, ...$ gegeben mit

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset ...$$

und abzählbar viele Ausdrucksmengen $\Phi_0 \subset L^{S_0}$, $\Phi_1 \subset L^{S_1}, ...$ mit $\mathrm{Wf}_{S_n}(\Phi_n)$ und $\Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset ....$
Seien $S := \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ und $\Phi := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_n$.
Dann gilt $\mathrm{Wf}_S(\Phi)$.

Beweis. Angenommen nicht, also $\mathrm{Wv}_S(\Phi)$. Nach Lemma 3.7 gäbe es sogar ein *endliches* $\Psi \subset \Phi$ mit $\mathrm{Wv}_S(\Psi)$. Da Ψ endlich ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\Psi \subset \Phi_N$. Aus $\mathrm{Wv}_S(\Phi)$ erhalten wir dann insbesondere $\mathrm{Wv}_S \Phi_N$. Nach Lemma 3.6 haben wir insbesondere

$$\begin{aligned} &\Phi_N \vdash_S v_o \equiv v_0 \quad \text{und} \\ &\Phi_N \vdash_S \neg v_0 \equiv v_0. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Ableitungen erhalten aber nur endlich viele Symbole aus S, diese Symbole sind daher bereits in einem S_M enthalten (o.B.d.A $M \geq N$). Wir haben also

$$\begin{aligned} &\Phi_M \vdash_{S_M} v_o \equiv v_0 \quad \text{und} \\ &\Phi_M \vdash_{S_M} \neg v_0 \equiv v_0, \end{aligned}$$

also ist $\mathrm{Wv}_{S_m}(\Phi_M)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

4 Der GÖDELsche Vollständigkeitssatz

Wir wollen zeigen: Wenn $\Phi \models \varphi$, dann $\Phi \vdash \varphi$ (Umkehrung von Satz 3.4 über die Korrektheit des Kalküls). Dazu ist hinreichend:

Satz 4.1 (Vollständigkeitssatz)**.** Jede widerspruchsfreie Menge von S–Ausdrücken ist erfüllbar.

Ist Satz 4.1 richtig, so folgt die anfängliche Behauptung daraus wie folgt: Sei Φ eine Menge von S–Ausdrücken und φ ein S–Ausdruck mit $\Phi \models \varphi$, aber *nicht* $\Phi \vdash \varphi$. Dann ist nach Übungsblatt 4, Aufgabe 3 $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ nicht erfüllbar und nach Lemma 3.9a) widerspruchsfrei. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 4.1.

Wir werden zunächst Satz 4.1 unter gewissen Zusatzvoraussetzungen beweisen. Unsere Aufgabe ist es also, zu jeder widerspruchsfreien Menge ein Modell anzugeben.

Idee (vielleicht etwas gewöhnungsbedürftig): Wir interpretieren die Symbole „durch sich selbst“ über dem Träger T^S (S–Terme).
Also $A = T^S$ und z.B. $f^{\mathfrak{A}}(t) := ft$ für ein einstelliges Funktionssymbol und $\beta(v_i) := v_i$ ($i \in \mathbb{N}$).

Problem: Angenommen, $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$ für zwei verschiedene Terme (etwa $\Phi \vdash \underbrace{+10}_{t_1} \equiv \underbrace{1}_{t_2}$ — beachte, dass in diesem Fall $t_1 \neq t_2$, da schließlich $+10$ und 1 verschiedene Zeichenketten sind.)

Dann ist $\mathfrak{I}(t_1) = t_1 \neq t_2 = \mathfrak{I}(t_2)$, also *nicht* $\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$.
Wegen $\Phi \models t_1 \equiv t_2$ (Korrektheit, Satz 3.4) kann also $\mathfrak{I}$ kein Modell von Φ sein.

Wir lösen dieses Problem, indem wir eine Äquivalenzrelation auf T^S definieren, unter der zwei Terme $t_1, t_2 \in T^S$ identifiziert werden, sofern $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$:

$$t_1 \sim t_2 \quad :\text{gdw} \quad \Phi \vdash t_1 \equiv t_2.$$

Lemma 4.2.

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Für ein n–stelliges Funktionssymbol f gilt: Wenn $t_1 \sim t'_1, ..., t_n \sim t'_n$, dann $ft_1...t_n \sim ft'_1...t'_n$.

(c) Für ein n–stelliges Relationssymbol R gilt: Wenn $t_1 \sim t'_1, ..., t_n \sim t'_n$, dann $\Phi \vdash Rt_1...t_n$ gdw $\Phi \vdash Rt'_1...t'_n$.

Beweis.

(a) folgt sofort aus der Regel $(=)$ sowie den Regeln

$$\frac{\Gamma \quad t_1 \equiv t_2}{\Gamma \quad t_2 \equiv t_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \quad t_1 \equiv t_2\\ \Gamma \quad t_2 \equiv t_3\end{array}}{\Gamma \quad t_1 \equiv t_3}$$

(s. Abschnitt 3.1)

(b) Seien $t_1 \sim t_1', ..., t_n \sim t_n'$, d.h. $\Phi \vdash t_1 \equiv t_1', ..., \Phi \vdash t_n \equiv t_n'$. Gemäß der Regel

$$\begin{array}{ll} \Gamma & t_1 \equiv t_1' \\ & \vdots \\ \Gamma & t_n \equiv t_n' \\ \hline \Gamma & ft_1...t_n \equiv ft_1'...t_n' \end{array}$$

folgt dann $\Phi \vdash ft_1...t_n \equiv ft_1'...t_n'$, also $ft_1...t_n \sim ft_1'...t_n'$.
geht ähnlich mit der Regel

$$\begin{array}{ll} \Gamma & t_1 \equiv t_1' \\ & \vdots \\ \Gamma & t_n \equiv t_n' \\ \Gamma & Rt_1...t_n \\ \hline \Gamma & Rt_1'...t_n' \end{array}$$

□

Sei $\bar{t} := \{t' \in T^S : t' \sim t\}$ die Äquivalenzklasse von t und $T^{\Phi,S} := \{\bar{t} : t \in T^S\}$ die Menge der Äquivalenzklassen.

Definition 4.3 (Terminterpretation)**.** Wir definieren eine S–Interpretation $\mathfrak{I}^\Phi = (\mathfrak{A}^\Phi, \beta^\Phi)$ wie folgt:

- Der Träger ist $T^{\Phi,S}$.
- $c^{\mathfrak{A}^\Phi} := \bar{c}$ für ein Konstantensymbol c.
- $f^{\mathfrak{A}^\Phi}(\overline{t_1}, ..., \overline{t_n}) := \overline{ft_1...t_n}$ (f n–stellig)
- $(\overline{t_1}, ..., \overline{t_n}) \in R^{\mathfrak{A}^\Phi}$:gdw $\Phi \vdash Rt_1...t_n$ (R n–stellig)
- $\beta^\Phi(v_i) := \overline{v_i}$ ($i \in \mathbb{N}$).

$\mathfrak{I}^\Phi$ heißt **Terminterpretation** bzgl. Φ. Beachte, dass $f^{\mathfrak{A}^\Phi}$ und $R^{\mathfrak{A}^\Phi}$ nach Lemma 4.2 wohldefiniert sind.

Lemma 4.4.

(a) Für jeden Term $t \in T^S$ ist $\mathfrak{I}^\Phi(t) = \bar{t}$.

(b) Für jeden atomaren Ausdruck $\varphi \in L^S$ ist $\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi$ gdw $\Phi \vdash \varphi$.

(c) Für jeden Ausdruck $\varphi \in L^S$ und paarweise verschiedene Variablen $x_1, ..., x_n$ gilt:

   (i) $\mathfrak{I}^\Phi \models \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \varphi$ gdw
   es existieren Terme $t_1, ..., t_n \in T^S$ mit $\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \frac{t_1...t_n}{x_1...x_n}$;

   (ii) $\mathfrak{I}^\Phi \models \forall x_1 ... \forall x_n \varphi$ gdw
   für alle Terme $t_1, ..., t_n \in T^S$ gilt $\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \frac{t_1...t_n}{x_1...x_n}$.

Beweis.

(a) Induktion: Für $t = v_i$ oder $t = c$ ist dies in Definition 4.3 enthalten. Sei f n–stellig und $t_1, .., t_n \in T^S$, so ist

$$\mathfrak{I}^\Phi(ft_1...t_n) = f^{\mathfrak{A}^\Phi}(\mathfrak{I}^\Phi(t_1), ..., \mathfrak{I}^\Phi(t_n)) \underset{\text{Ind-Vor.}}{=} f^{\mathfrak{A}^\Phi}(\overline{t_1}, ..., \overline{t_n}) \underset{\text{Def. 4.3}}{=} \overline{ft_1...t_n}.$$

(b)
- $\varphi = t_1 \equiv t_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \quad \text{gdw} \\
&\mathfrak{I}^\Phi(t_1) = \mathfrak{I}^\Phi(t_2) \quad \text{gdw (a)} \\
&\overline{t_1} = \overline{t_2} \quad \text{gdw} \\
&t_1 \sim t_2 \quad \text{gdw} \quad \Phi \vdash t_1 \equiv t_2.
\end{aligned}$$

- $\varphi = Rt_1...t_n$:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \quad \text{gdw} \\
&(\mathfrak{I}^\Phi(t_1), ..., \mathfrak{I}^\Phi(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}^\Phi} \quad \text{gdw (a)} \\
&(\overline{t_1}, ..., \overline{t_n}) \in R^{\mathfrak{A}^\Phi} \quad \text{gdw (Def. 4.3)} \\
&\Phi \vdash Rt_1...t_n.
\end{aligned}$$

(c) (i)

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I}^\Phi \models \exists x_1 ... \exists x_n \varphi \quad \text{gdw} \\
&\text{es existieren } \overline{t_1}, ..., \overline{t_n} \in T^{\Phi,S} \text{ mit } \mathfrak{I}^\Phi \frac{\overline{t_1}...\overline{t_n}}{x_1...x_n} \models \varphi \quad \text{gdw (a)} \\
&\text{es existieren } t_1, ..., t_n \in T^S \text{ mit} \\
&\mathfrak{I}^\Phi \frac{\mathfrak{I}^\Phi(t_1)...\mathfrak{I}^\Phi(t_n)}{x_1...x_n} \models \varphi \quad \text{gdw (Substitutionslemma)} \\
&\text{es existieren } t_1, ..., t_n \in T^S \text{ mit } \mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \frac{t_1...t_n}{x_1...x_n}.
\end{aligned}$$

(ii) geht analog.

$\square$

Lemma 4.4b) sagt nun immerhin, dass $\mathfrak{I}^{\Phi}$ ein Modell der *atomaren* Ausdrücke von Φ ist. Damit dies für *alle* Ausdrücke aus Φ der Fall sei, brauchen wir noch zwei Bedingungen:

Definition 4.5.

(a) Φ heißt **negationstreu** (oder syntaktisch vollständig), wenn für jeden S–Ausdruck φ gilt:

$$\Phi \vdash \varphi \qquad \text{oder} \qquad \Phi \vdash \neg\varphi.$$

(b) Φ **enthält Beispiele**, wenn für jeden Ausdruck der Form $\exists x\varphi$ ein Term $t \in T^S$ existiert mit $\Phi \vdash (\exists x\varphi \longrightarrow \varphi\frac{t}{x})$.

Lemma 4.6. Sei Φ widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle $\varphi, \psi \in L^S$:

(a) $\Phi \vdash \varphi$ gdw nicht $\Phi \vdash \neg\varphi$.

(b) $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$ gdw $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$.

(c) $\Phi \vdash \exists x\varphi$ gdw es existiert ein $t \in T^S$ mit $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.

Beweis. (a) Da Φ negationstreu ist, gilt $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$. Da Φ widerspruchsfrei ist, können aber nicht beide Aussagen gleichzeitig gelten.

(b) „$\Rightarrow$“: Sei $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$, aber nicht $\Phi \vdash \varphi$. Wegen Negationstreue ist dann $\Phi \vdash \neg\varphi$. Nach der Regel „Modus Ponens“ (mit φ und $\neg\varphi$ vertauscht) ist dann $\Phi \vdash \psi$.
„$\Leftarrow$“: Ist $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$, so folgt $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$ aus der Regel ($\vee$S).

(c) „$\Rightarrow$“: Gelte $\Phi \vdash \exists x\varphi$. Da Φ Beispiele enthält, existiert ein $t \in T^S$ mit $\Phi \models (\exists x\varphi \longrightarrow \varphi\frac{t}{x})$. Mit „Modus Ponens“ (unter Beachtung von $\varphi \longrightarrow psi = \neg\varphi \vee \psi$) folgt $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.
„$\Leftarrow$“: Ist $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$, so folgt $\Phi \vdash \exists x\varphi$ aus der Regel ($\exists$S).

$\square$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{rg}(\varphi)$ den **Rang** eines Ausdrucks, also die Anzahl der in φ vorkommenden Junktoren und Quantoren; genauer:

- $\mathrm{rg}(\varphi) := 0$, falls φ atomar,
- $\mathrm{rg}(\neg\varphi) := \mathrm{rg}(\varphi) + 1$,
- $\mathrm{rg}(\varphi \vee \psi) := \mathrm{rg}(\varphi) + \mathrm{rg}(\psi) + 1$,
- $\mathrm{rg}(\exists x \varphi) := \mathrm{rg}(\varphi) + 1$.

Satz 4.7 (Henkin)**.** Sei Φ widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \quad \text{gdw} \quad \Phi \vdash \varphi.$$

Beweis. Induktion über $\mathrm{rg}(\varphi)$:

- $\mathrm{rg}(\varphi) = 0$, d.h. φ atomar, dann ist die Aussage genau Lemma 4.4b).
- $\varphi = \neg\psi$: Dann ist $\mathrm{rg}(\psi) < \mathrm{rg}(\varphi)$, und

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \quad &\text{gdw} \quad \text{nicht } \mathfrak{I}^{\Phi} \models \psi \\ \underset{\text{Ind-Vor.}}{\text{gdw}} \quad &\text{nicht } \Phi \vdash \psi \quad \underset{\text{Lemma 4.6a)}}{\text{gdw}} \quad \Phi \vdash \neg\psi. \end{aligned}$$

- $\varphi = (\psi \vee \chi)$: Dann ist ebenfalls $\mathrm{rg}(\psi), \mathrm{rg}(\chi) < \mathrm{rg}(\varphi)$, und

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \quad &\text{gdw} \quad \mathfrak{I}^{\Phi} \models \psi \text{ oder } \mathfrak{I}^{\Phi} \models \chi \\ \underset{\text{(Ind-Vor.)}}{\text{gdw}} \quad &\Phi \vdash \psi \text{ oder } \Phi \vdash \chi \quad \underset{\text{Lemma 4.6.6}}{\text{gdw}} \quad \Phi \vdash (\psi \vee \chi). \end{aligned}$$

- $\varphi = \exists x \psi$: Wieder $\mathrm{rg}(\psi) < \mathrm{rg}(\varphi)$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \quad &\underset{\text{Lemma 4.4c)}}{\text{gdw}} \quad \text{es existiert } t \in T^S \text{ mit } \mathfrak{I}^{\Phi} \models \psi\frac{t}{x} \\ \underset{\text{Ind-Vor}}{\text{gdw}} \quad &\text{es existiert } t \in T^S \text{ mit } \Phi \vdash \psi\frac{t}{x} \\ \underset{\text{Lemma 4.6c)}}{\text{gdw}} \quad &\Phi \vdash \exists x \psi. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.8. Ist Φ widerspruchsfrei, negationstreu und enthält Beispiele, so ist Φ erfüllbar.

Im Folgenden führen wir allgemeine widerspruchsfreie Mengen auf solche zurück, die negationstreu sind und Beispiele enthalten.

Wir setzten bis auf Weiteres voraus, dass die Symbolmenge S (höchstens) *abzählbar* ist.
Die Erweiterung zu einer Menge, die Beispiele enthält, geht mit

Lemma 4.9. Sei S höchstens abzählbar, $\Phi \subset L^S$ widerspruchsfrei und

$$\text{frei}(\Phi) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$$

endlich. Dann existiert ein widerspruchsfreies $\Phi \subset \Psi \subset L^S$, das Beispiele enthält.

Beweis. Nach Lemma 1.6 ist L^S abzählbar. Sei also $\exists x_0 \varphi_0, \exists x_1 \varphi_1, ...$ eine Abzählung alles Ausdrücke von L^S, die mit dem Existenzquantor beginnen. Der Plan ist nun, für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Ausdruck der Form

$$\psi_n := \left(\exists x_n \varphi_n \longrightarrow \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \right)$$

zu Φ hinzuzufügen.
Genauer: Angenommen, ψ_m sei bereits für $m < n$ definiert. Nach der Voraussetzung, dass $\text{frei}(\Phi)$ endlich sei, ist dann auch

$$\text{frei}(\Phi \cup \{\psi_m \ : \ m < n\} \cup \{\exists x_n \varphi_n\})$$

endlich. Sei y_n die Variable mit kleinstem Index, die *nicht* in $\text{frei}(\Phi \cup \{\psi_m \ : \ m < n\} \cup \{\exists x_n \varphi_n\})$ enthalten ist. Dann setzen wir

$$\psi_n := \left(\exists x_n \varphi_n \longrightarrow \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \right) \quad \text{und}$$
$$\Psi := \Phi \cup \{\psi_0, \psi_1, ...\}.$$

Offensichtlich gilt $\Phi \subset \Psi$, und Ψ enthält Beispiele. Es bleibt die Widerspruchsfreiheit zu zeigen.

Nach Lemma 3.10 genügt es dafür, für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Widerspruchsfreiheit von

$$\Phi_n := \Phi \cup \{\psi_m \ : \ m < n\}$$

zu zeigen. Wir führen Induktion nach n:
Für $n = 0$ ist $\Phi_0 = \Phi$, was nach Voraussetzung widerspruchsfrei ist. Sei

nun Φ_n widerspruchsfrei und nimm an, $\Phi_{n+1} = \Phi_n \cup \{\psi_n\}$ wäre widerspruchs*voll*. Dann existiert insbesondere für jeden Satz $\varphi \in L^S$ eine Sequenz $\Gamma \subset \Phi_n$ so, dass

$$\vdash \Gamma \psi_n \varphi.$$

Da $\psi_n = \left(\exists x_n \varphi_n \longrightarrow \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\right)$ nur eine Schreibweise für $\psi_n = \left(\neg\exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\right)$ ist, erhalten wir folgende Ableitung:

1. $\Gamma \quad \left(\neg\exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\right) \quad \varphi$ (Prämisse)
2. $\Gamma \quad \neg\exists x_n \varphi_n \quad \neg\exists x_n \varphi_n$ (Vor)
3. $\Gamma \quad \neg\exists x_n \varphi_n \quad \left(\neg\exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\right)$ ($\vee$S) auf 2.
4. $\Gamma \quad \neg\exists x_n \varphi_n \quad \varphi$ (KS) auf 3., 1.
5. $\Gamma \quad \varphi_n \frac{y_n}{x_n} \quad \varphi$ (Analog zu 1. – 4., indem man $\neg\exists x_n \varphi_n$ durch $\varphi_n \frac{y_n}{x_n}$ ersetzt)
6. $\Gamma \quad \exists x_n \varphi_n \quad \varphi$ ($\exists$A) auf 5. Beachte: $y_n \notin$ frei$(\Gamma \exists x_n \varphi_n \varphi)$ nach Wahl von y_n und da φ Satz.
7. $\Gamma \quad \varphi$ (FU) auf 4., 6.

Da φ ein beliebiger Satz war, gilt ebenso $\vdash \Gamma \neg \varphi$. Also ist Γ und damit Φ_n widerspruchsvoll, im Widerspruch zur Induktionsannahme. □

Die negationstreue Erweiterung ergibt sich mit

Lemma 4.10. Sei $\Psi \subset L^S$ widerspruchsfrei. Dann existiert ein widerspruchfreies $\Psi \subset \Theta \subset L^S$, das negationstreu ist.

Beweis. Da wieder nach Lemma 1.6. L^S abzählbar ist, gibt es eine Abzählung $\varphi_0, \varphi 1, ...$ von L^S. Wir definieren induktiv Ausdrucksmengen Ψ_n durch $\Psi_0 := \Psi$,

$$\Psi_{n+1} := \begin{cases} \Psi_n \cup \{\varphi_n\} & \text{falls } \Psi_n \cup \{\varphi_n\} \text{ widerspruchsfrei} \\ \Psi_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze $\Theta := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi_n$. Klar ist $\Psi \subset \Theta$. Nach Definition ist jedes Ψ_n widerspruchsfrei und damit nach Lemma 3.10 auch Θ. Schließlich ist Θ negationstreu: Denn angenommen nicht $\Theta \vdash \neg\varphi_n$, so ist nach Lemma 3.9 $\mathrm{Wf}(\Theta \cup \{\varphi_n\})$ und insbesondere $\mathrm{Wf}(\Psi_n \cup \{\varphi_n\})$ (da ja $\Psi_n \subset \Theta$). Nach Konstruktion folgt dann $\Psi_{n+1} = \Psi_n \cup \{\varphi_n\}$, somit $\varphi_n \in \Theta$, und nach Regel (Vor) schließlich $\Theta \vdash \varphi_n$. □

Korollar 4.11. Sei Φ widerspruchsfrei mit $\mathrm{frei}(\Phi)$ endlich. Dann ist Φ erfüllbar.

Beweis. Nach Lemma 4.9 gibt es ein $\Psi \supset \Phi$, sodass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält. Nach Lemma 4.1 gibt es ein $\Theta \supset \Psi \supset \Phi$, welches widerspruchsfrei und negationstreu ist und immer noch Beispiele enthält (nämlich die aus Ψ). Nach dem Satz von HENKIN ist Θ und damit insbesondere Φ erfüllbar. □

Damit sind alle Vorbereitungsen getroffen für den

Vollständigkeitssatz (für abzählbare Symbolmengen). Sei S höchstens abzählbar und $\Phi \subset L^S$ widerspruchsfrei. Dann ist Φ erfüllbar. Es gilt

$$\Phi \models \varphi \quad \text{gdw} \quad \Phi \vdash \varphi.$$

Beweis. Die letzte Aussage wurde am Anfang des Abschnittes 4 in den Vorbemerkungen begründet.
Wir wollen die Erfüllbarkeit von Φ auf Korollar 4.11 zurückführen, indem wir die freien Variablen durch neue Konstanten ersetzen.

Seien dazu $c_0, c_1, ...$ abzählbar viele Konstantensymbole, die *nicht* in S und paarweise verschieden sind. Setze

$$S' := S \cup \{c_0, c_1, ...\}.$$

Sei $\varphi \in L^S$ und $n(\varphi)$ die kleinste natürliche Zahl so, dass $\mathrm{frei}(\varphi) \subset \{v_0, v_1, ..., v_{n(\varphi)-1}\}$. Setze

$$\varphi' := \varphi\frac{c_0 ... c_{n(\varphi)-1}}{v_0 ... v_{n(\varphi)-1}} \qquad \text{sowie}$$
$$\Phi' := \{\varphi' \ : \ \varphi \in \Phi\}.$$

Behauptung: Φ' ist bezüglich S' widerspruchsfrei.

Beweis der Behauptung: Nach Lemma 3.10 genügt es zu zeigen, dass $\{\varphi'_0, \varphi'_1, ..., \varphi'_n\}$ wderspruchsfrei ist für endlich viele $\varphi_0, ..., \varphi_n \in \Phi$. Nach Lemma 3.8 genügt es dazu wiederum zu zeigen, dass $\{\varphi'_0, ..., \varphi'_n\}$ erfüllbar ist.
Es ist $\{\varphi_0, ..., \varphi_n\}$ als Teilmenge der widerspruchsfreien Menge Φ selbst widerspruchsfrei (bzgl. S), und da $\mathrm{frei}(\{\varphi_0, ..., \varphi_n\})$ endlich ist, ist sie gemäß Korollar 4.11 erfüllbar durch eine S–Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$.

Wir definieren eine S'–Interpretation $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}', \beta')$ durch $\mathfrak{I}'|_S := \mathfrak{I}$ und

$$\mathfrak{I}'(c_m) := \beta(v_m),\ m \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Substitutions– und dem Koinzidenzlemma gilt dann für beliebiges $\varphi \in L^S$:

$$\mathfrak{I}' \models \underbrace{\varphi\frac{c_0...c_{n(\varphi)-1}}{v_0...v_{n(\varphi)-1}}}_{=\varphi'} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{I} \models \varphi.$$

Da $\mathfrak{I} \models \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, ist $\mathfrak{I}' \models \{\varphi'_1, ..., \varphi'_n\}$, also ist $\{\varphi'_1, ..., \varphi'_n\}$ erfüllbar und die Behauptung ist gezeigt.

Der Satz folgt nun in folgender Weise:
Da Φ' widerspruchsfrei ist (bzgl. S') und keine freien Variablen enthält, liefert Korollar 4.11 eine S'–Interpretation $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}', \beta')$ mit $\mathfrak{I}' \models \Phi'$. Da Φ' aber eine Menge von *Sätzen* ist, ist diese Gültigkeit *unabhängig* von β' (Koinzidenzlemma!), und wir dürfen wählen

$$\beta'(v_n) := \mathfrak{I}'(c_n)\ (n \in \mathbb{N}).$$

Ist nun $\varphi \in \Phi$, so gilt nach Substitutionslemma

$$\mathfrak{I} \models \underbrace{\varphi\frac{c_0....c_{n(\varphi)-1}}{v_0...v_{n(\varphi)-1}}}_{\varphi'} \quad \text{gdw} \quad \underbrace{\mathfrak{I}'\frac{\mathfrak{I}'(c_0)...\mathfrak{I}'(c_n)}{v_0...v_{n(\varphi)-1}}}_{\mathfrak{I}'} \models \varphi$$

$$\text{gdw} \quad \mathfrak{I}' \models \varphi,$$

also ist $\mathfrak{I}'$ ein Modell von Φ. □

Bemerkungen.

- Mit dem Koinzidenzlemma kann man zeigen (Übung), dass Gültigkeit und Erfüllbarkeit *nicht* von der Symbolmenge S abhängen. Der Vollständigkeitssatz besagt, dass Φ erüllbar gdw Φ widerspruchsfrei (bzgl. S) und $\Phi \models \varphi$ gdw $\Phi \vdash_S \varphi$.
  Dies zeigt insbesondere, das auch Widerspruchsfreiheit und Ableitbarkeit *nicht* von S abhängen.

- Die Voraussetzung der Abzählbarkeit von S ist nicht notwendig: Man kann zeigen, dass der Vollständigkeitssatz für beliebige (auch überabzählbare) Symbolmengen Bestand hat. Man muss beim Beweis allerdings das Auswahlaxiom in Gestalt des ZORNschen Lemmas verwenden.

5 Der Satz von LÖWENHEIM–SKOLEM

Nächstes Ziel: Nachweis der nicht-Axiomatisierbarkeit von $\mathbb{N}$ in Prädikatenlogik erster Stufe.

Satz 5.1 (LÖWENHEIM und SKOLEM)**.** Sei Φ eine höchstens abzählbare Menge von Ausdrücken. Ist Φ erfüllbar, so besitzt Φ ein Modell mit höchstens abzählbarem Träger.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, Φ bestehe nur aus S–**Sätzen**. Da Φ nur aus abzählbar vielen Ausdrücken besteht, deren jeder nur endlich viele Symbole aus S enthält, ist o.B.d.A. S abzählbar.
Da Φ erfüllbar ist, ist es widerspruchsfrei, und gemäß Kapitel 4 können wir Φ zu einer S–Ausdrucksmenge erweitern, die von ihrer Terminterpretation erfüllt wird. Deren Träger ist aber eine Menge von Äquivalenzklassen in T^S, also insbesondere abzählbar. Für allgemeines Φ betrachten wir wieder

$$\Phi' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \varphi\frac{c_0 \dots c_{n-1}}{v_0 \dots v_{n-1}} \;:\; \varphi \in \Phi, \mathrm{frei}(\Phi) \subset \{v_0, \dots, v_{n-1}\} \right\}$$

als S'–Ausdrucksmenge mit $S' = S \cup \{c_0, c_1, \dots\}$ höchstens abzählbar.
Da $\mathrm{frei}(\Phi') = \emptyset$, hat nach dem bereits Bewiesenen Φ' ein höchstens abzählbares Modell, und nach dem Beweis des Vollständigkeitssatzes ist dann auch Φ erfüllbar über demselben Träger. $\square$

Erinnerung (Siehe Ende Abschnitt 2.4). Zwei Strukturen heißen **isomorph**, wenn zwischen ihren Trägern eine Bijektion besteht, die mit der Interpretation der Symbole verträglich ist, genauer:
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind isomorph, wenn eine Bijektion $\pi : A \to B$ existiert sodass

- $R^{\mathfrak{A}} a_1 ... a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) ... \pi(a_n)$ für alle $a_1, ..., a_n \in A$,
- $f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1, ..., \pi(a_n))$ für alle $a_1, ..., a_n \in A$,
- $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Wir erinnern uns auch an die Sprache $S^{<}_{Ar} = \{+, \otimes, 0, 1, <\}$.

Korollar 5.2 (aus LÖWENHEIM–SKOLEM)**.** Es existiert keine $S^{<}_{Ar}$–Satzmenge, die die Struktur der reellen Zahlen bis auf Isomorphie charakterisiert; genauer: Es gibt keine $S^{<}_{Ar}$–Satzmenge Φ, sodass gälte: ist $\mathfrak{A}$ eine Struktur mit $\mathfrak{A} \models \Phi$, so ist $\mathfrak{A}$ zur Standardstruktur der reellen Zahlen isomorph.

Beweis. Da $S^{<}_{Ar}$ endlich ist, ist $L^{S^{<}_{Ar}}$ abzählbar, und somit ist jede Menge $\Phi \subset L^{S^{<}_{Ar}}$ höchstens abzählbar. Wäre Φ wie angegeben, so wäre ja die Standardstruktur der reellen Zahlen ein Modell für Φ, also wäre Φ erfüllbar. Nach LÖWENHEIM–SKOLEM gäbe es dann ein höchstens abzählbares Modell von Φ, das nicht zu den reellen Zahlen isomorph sein kann (da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist). □

Satz 5.3 (Kompaktheitssatz)**.**

(a) $\Phi \models \varphi$ gdw es gibt **endliches** Φ_0 mit $\Phi_0 \models \varphi$.

(b) Φ erfüllbar gdw Φ_0 erfüllbar für jedes **endliche** $\Phi_0 \subset \Phi$.

Beweis.

(a) Nach Definition ist $\Phi \vdash \varphi$ genau dann, wenn $\Phi_0 \vdash \varphi$ für ein endliches $\Phi_0 \subset \Phi$. Nach Vollständigkeitssatz gilt aber $\Phi \vdash \varphi$ gdw $\Phi \models \varphi$.

(b) Nach Lemma 3.7 ist $\mathrm{Wf}(\Phi)$ genau dann, wenn $\mathrm{Wf}(\Phi_0)$ für alle endlichen $\Phi_0 \subset \Phi$. Nach Vollständigkeitssatz ist aber Φ genau dann widerspruchsfrei, wenn es erfüllbar ist.

□

Satz 5.4. Habe für jedes $n \in \mathbb{N}$ Φ ein Modell, dessen Träger mindestens n-elementig ist. Dann hat Φ auch ein unendliches Modell.

Beweis. Bezeichne mit $\varphi_{\geq n}$ den Satz, der interpretiert wird als „es gibt mindestens n paarw. verschiedene Elemente", also

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\geq 1} := \exists x\, x \equiv x,\\
&\varphi_{\geq 2} := \exists x \exists y\, \neg x \equiv y,\\
&\varphi_{\geq 3} := \exists x \exists y \exists z ((\neg x \equiv y \wedge \neg x \equiv z) \wedge \neg y \equiv z)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass die Menge $\Phi \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\varphi_{\geq n}\}$ erfüllbar ist, denn jedes Modell dieser Menge ist auch Modell von Φ und hat unendlichen Träger. Nach Kompaktheitssatz 5.3b) genügt es aber, dass jede *endliche* Teilmenge von $\Phi \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\varphi_{\geq n}\}$, also jede Menge der Form $\Phi \cup \bigcup_{n=1}^{N} \{\varphi_{\geq n}\}$, erfüllbar ist. Dies ist aber genau die Voraussetzung. □

Wir sagen, eine Menge B sei mindestens so groß wie eine Menge A, wenn es eine injektive Abbildung $A \to B$ gibt.

Satz 5.5. Eine Ausdrucksmgene Φ habe ein unendliches Modell. Dann gilt für jede Menge A:
Φ hat ein Modell, dessen Träger mindestens so groß ist wie A.

Beweis. Sei $\Phi \in L^S$ und A eine beliebige Menge. Für jedes $a \in A$ sei $c_a \notin \S$ ein neues Konstantensymbol, und es gelte $c_a \neq c_b$ für $a \neq b$. Definiere:

$$\Psi := \Phi \cup \{\neg c_a \equiv c_b \;:\; a, b \in A, a \neq b\},$$

dann ist Ψ erfüllbar: In der Tat, nach Voraussetzung existiert eine S–Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{B}, \beta)$ von Φ mit unendlichem Träger B. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2, ..., b_n$ n verschiedene Elemente von B. Betrachte eine Teilmenge von Ψ der Form

$$\Phi \cup \{\neg c_{a_i} \equiv c_{a_j} \;:\; i, j = 1, ..., n, i \neq j\}$$

und setze $c_{a_i}^{\mathfrak{B}} := b_i$ $(i = 1, ..., n)$. Dann ist $\big((\mathfrak{B}, c_{a_1}^{\mathfrak{B}}, ..., c_{a_n}^{\mathfrak{B}}), \beta\big)$ ein Modell dieser Teilmenge, und nach Kompaktheitssatz ist Ψ erfüllbar. Wegen $\Phi \subset \Psi$ ist aber auch Φ erfüllbar. Sei $\mathfrak{I}'$ ein Modell von Ψ (und damit auch von Φ). Wegen $\mathfrak{I}' \models \neg c_a \equiv c_b$ ist

$$\mathfrak{I}'(c_a) \neq \mathfrak{I}'(c_b) \text{ für alle } a, b \in A, a \neq b,$$

also ist $a \mapsto \mathfrak{I}'(c_a)$ eine injektive Abbildung von A in den Träger von $\mathfrak{I}'$. □

Als Korollar erhalten wir, dass es z.B. „beliebig große" Körper gibt: Sei dazu Φ die Menge der Körperaxiome (Bsp. 4 in Abschnitt 2.4). Wir wissen, dass z.B. $\mathbb{Q}$ ein unendliches Modell von Φ ist, also erhalten wir aus Satz 5.5 z.B. einen Körper, der mindestens so groß ist wie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})))$ (die Potenzmenge der Potenzmenge der Potenzmenge von $\mathbb{R}$ ist verdammt groß...) Ebenso Vektorräume, Gruppen, etc.

5.1 Elementare Klassen und elementare Äquivalenz

Grundfrage: Welche mathematischen Stukturen (z.B. endlichdimensionale Vektorräume, natürliche Zahlen,...) sind in Prädikatenlogik erster Stufe axiomatisierbar?

Sei S eine Symbolmenge und Φ eine Menge von S–Sätzen.
Wir nennen

$$\mathrm{Mod}^S\Phi := \{\mathfrak{A} \;:\; \mathfrak{A} \text{ ist } S\text{–Struktur}, \mathfrak{A} \models \Phi\}$$

die **Modellklasse** von Φ. $\mathrm{Mod}^S\Phi$ besteht also aus allen Modellen von Φ.

Definition 5.6. Sei κ eine Klasse von S–Strukturen.

(a) κ heißt **elementar**, wenn es einen S–Satz φ gibt mit $K = \mathrm{Mod}^S\{\varphi\}$.

(b) κ heißt **Δ–elementar**, wenn es eine Satzmenge Φ gibt mit $K = \mathrm{Mod}^S\Phi$.

Beispiele

- Die Klasse der Körper ist elementar: Sei nämlich φ_K die Konjunktion der (endlich vielen!) Körperaxiome aus Abschnitt 2.4.
  Dann ist $\mathrm{Mod}^{S_{Ar}}\varphi_K$ genau die Klasse der Körper.

- Die Klasse der **endlichen** Körper ist **nicht** Δ–elementar. Denn wäre Φ eine S_{Ar}–Satzmenge, die in allen endlichen, aber keinem unendlichen Körper gälte, so hätte Φ beliebig große endliche, aber kein unendliches Modell, im Widerspruch zu Satz 5.4.

- Sei p eine Primzahl. Man sagt, ein Körper $\mathbb{K}$ habe **Charakteristik** p, wenn

$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{p\text{–mal}} = 0$$

(z.B. der Körper $\mathbb{Z}_p$) Gibt es keine Primzahl p, sodass $\mathbb{K}$ Charakteristik p hat, so hat $\mathbb{K}$ Charakteristik 0 (z.B. $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$).
Sei φ_K wie oben die Konjuktion der Körperaxiome und

$$\chi_p := \underbrace{+ + ... +}_{(p-1)\text{–mal}}\underbrace{11...1}_{p\text{–mal}} \equiv 0.$$

Dann sind die Körper der Charakteristik p genau die Modelle von $\varphi_K \wedge \chi_p$, also ist die Klasse der Körper der Charakteristik p elementar. Die Körper der Charakteristik 0 sind genau die Modelle von

$$\{\varphi_K\} \cup \{\neg\chi_p \ : \ p \text{ Primzahl}\},$$

also ist diese Klasse Δ–elementar.
Sei nun φ ein S_{Ar}[[–Satz]], der in allen Körpern der Charakteristik 0 gilt, also

$$\{\varphi_K\} \cup \{\neg\chi_p \ : \ p \text{ Primzahl}\} \models \varphi.$$

Nach dem Kompaktheitssatz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass bereits

$$\{\varphi_K\} \cup \{\neg\chi_p \ : \ p \text{ Primzahl, } p \leq N\} \models \varphi,$$

d.h. jeder Satz, der in allen Körpern der Charakteristik 0 gilt, gilt sogar in allen Körpern hinreichend großer Charakteristik! Dies zeigt auch, dass die Klasse der Körper von Charakteristik 0 nicht elementar ist, denn sonst gäbe es einen Satz, der in allen diesen Körpern, aber in keinem Körper der Charakteristik $\neq 0$ gälte.

Definition 5.7. (a) Zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen **elementar äquivalent**, wenn sie nicht durch Sätze 1. Stufe unterschieden werden können, d.h. wenn für jeden Satz φ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{B} \models \varphi.$$

(b) Die **Theorie** einer Struktur $\mathfrak{A}$ ist definiert als

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \text{ Satz} \ : \ \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Man kann leicht zeigen, dass isomorphe Strukturen elementar äquivalent sind (s. Ebbinghaus et al. Lemma 3.5.2).
Gilt auch die Umkehrung? — Meistens **nein**, wie wir im folgenden sehen werden.

Für zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ schreiben wir

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph,
- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent sind.

Lemma 5.8. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei S–Strukturen. Es gilt:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}).$$

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi$. Wegen $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ folgt $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.
$\Leftarrow$: Gelte $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Sei φ ein S–Satz mit $\mathfrak{B} \models \varphi$. Wäre **nicht** $\mathfrak{A} \models \varphi$, so wäre $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$; also $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ und damit $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$, im Widerspruch zu $\mathfrak{B} \models \varphi$. Sei umgekehrt φ ein Satz mit $\mathfrak{A} \models \varphi$, so ist $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ und daher $\mathfrak{B} \models \varphi$. □

Satz 5.9. (a) Sei $\mathfrak{A}$ eine S–Struktur mit unendlichem Träger. Dann ist $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ nicht Δ–elementar.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine S–Struktur, so ist

$$\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\} = \mathrm{Mod}^S \mathrm{Th}(\mathfrak{A}),$$

insbesondere ist $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\}$ Δ–elementar. $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\}$ ist die kleinste Δ–elementare Klasse, die $\mathfrak{A}$ enthält.

Beweis. (a) Angenommen, Φ wäre eine Menge von Sätzen mit

$$\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\} = \mathrm{Mod}^S \Phi.$$

Da $\mathfrak{A} \models \Phi$ wäre, hätte Φ ein unendliches Modell und nach Satz 5.5 ein Modell, dessen Träger mindestens so groß wäre wie die Potenzmenge des Trägers von $\mathfrak{A}$. Dieses Modell kann aber nicht isomorph zu $\mathfrak{A}$ sein, Widerspruch.

(b) Sei $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ nach Lemma 5.8. Ist umgekehrt $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, so ist ebenfalls nach Lemma 5.8 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Damit ist

$$\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\} = \mathrm{Mod}^S \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$$

gezeigt.
Sei nun κ eine Δ–elementare Klasse, die $\mathfrak{A}$ enthält, und sei $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Nach Annahme gibt es eine Satzmenge Φ mit $\kappa = \mathrm{Mod}^S \Phi$, also insbesondere $\mathfrak{A} \models \Phi$. Wegen $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ gilt auch $\mathfrak{B} \models \Phi$ und damit enthält κ auch B. Damit haben wir $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\} \subset \kappa$.

□

Korollar 5.10. Zu jeder unendlichen Struktur existiert eine elementar äquivalente, aber nicht isomorphe Struktur.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ unendlich. Angenommen, jede zu $\mathfrak{A}$ elementar äquivalente Struktur wäre zu $\mathfrak{A}$ isomorph, also $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\} \subset \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$.
Da aber sowieso

$$\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\} \supset \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}.$$

gälte Gleichheit. Da nach Satz 5.9b) $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\}$ Δ–elementar ist, müsste daher auch $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ Δ–elementar sein, im Widerspruch zu Satz 5.9a). □

Damit ist insbesondere gezeigt: Es existieren zu $\mathbb{N}$ nicht isomorphe Strukturen, die in Prädikatenlogik 1. Stufe nicht unterscheidbar sind! (Nicht-Standardmodelle der natürlichen Zahlen)
Unter desem Modell gibt es sogar abzählbare:

Satz 5.11 (Satz von SKOLEM)**.** Es existiert eine abzählbare Struktur, die zu $\mathbb{N}$ elementar äquivalent, aber nicht isomorph ist.

Beweis. Setze

$$\Psi := \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\neg x \equiv 0\} \cup \{\neg x \equiv 1\} \cup \{\neg x \equiv 2\} \cup ...,$$

wobei wir die Sprache $S = \{+, \otimes, 0, 1\}$ zugrundelegen und abkürzend schreiben

$$2 = +11, \quad 3 = ++111, \quad \text{etc.}$$

Sei Ψ_N die Teilmenge

$$\Psi_N := \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\neg x \equiv 0\} \cup ... \cup \{\neg x \equiv N\},$$

so hat Ψ_N ein Modell, nämlich $(\mathbb{N}, \beta)$; für eine Belegung β mit $\beta(x) = N + 1$. Nach Kompaktheitssatz hat deshalb auch Ψ ein Modell, und nach LÖWENHEIM–SKOLEM kann diese Modell sogar abzählbar gewählt werden. Das Modell heiße $(\mathfrak{A}, \beta)$. Wegen $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ ist nach Lemma 5.8 $\mathfrak{A} \equiv \mathbb{N}$. Wegen $\mathfrak{A} \models \neg m \equiv n$ für alle $m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n$, ist $\mathfrak{A}$ abzählbar unendlich.
Allerdings ist nicht $\mathfrak{A} \cong \mathbb{N}$, denn wäre π ein Isomorphismus, so müsste $\pi(n) = n^{\mathfrak{A}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\beta(x)$ nicht im Bild von π läge. □