Prof. Dr. Rico Zacher
Institut für Angewandte Analysis
Universität Ulm

SoSe 2014

Nichtlineare Funktionalanalysis

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Es sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum mit $\Omega \neq \emptyset$. Sei $F : \Omega \to \Omega$ eine surjektive Abbildung mit der Eigenschaft

$$d(Fx, F\tilde{x}) \geq 2d(x, \tilde{x}) \quad \forall x, \tilde{x} \in \Omega.$$

Man zeige, dass F genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 2. Man beweise die folgende schwächere Formulierung des Satzes über implizite Funktionen (vgl. Bemerkung 2.29 (ii) in der Vorlesung):

Seien X, Y, Z B-Räume, $\Lambda \subset Z$ und $\Omega \subset X$ offen und $F \in C(\Lambda \times \Omega, Y)$. Es existiere $D_x F$ in $\Lambda \times \Omega$ und sei dort stetig. Ferner sei $(\lambda_*, x_*) \in \Lambda \times \Omega$ mit $F(\lambda_*, x_*) = 0$, und $D_x F(\lambda_*, x_*) \in \mathcal{B}(X, Y)$ sei invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen Λ' von λ_* in Z sowie Ω' von x_* in X und eine Abbildung $H \in C(\Lambda', X)$, so dass gilt:

(a) $F(\lambda, H(\lambda)) = 0$ für alle $\lambda \in \Lambda'$,

(b) $F(\lambda, x) = 0$ für $(\lambda, x) \in \Lambda' \times \Omega' \Rightarrow x = H(\lambda)$.

Aufgabe 3. Sei X ein B-Raum, $\emptyset \neq \Omega \subset X$ offen und $F : \Omega \to Y$ *gleichmäßig stetig*, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $||x_1 - x_2|| \leq \delta$ die Ungleichung $||F(x_1) - F(x_2)|| \leq \varepsilon$ gilt. Man zeige:

(a) Es existiert eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{F} : \bar{\Omega} \to Y$, welche F stetig fortsetzt.

(b) Ist Ω beschränkt und konvex, dann ist $F(\Omega)$ beschränkt.

Aufgabe 4. Seien X, Y B-Räume und $L_0, L_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Sei L_0 invertierbar. Für $t \in (0, 1)$ wird der Operator L_t definiert durch

$$L_t = (1 - t)L_0 + tL_1.$$

Es gebe eine Konstante $M > 0$, so dass für alle $t \in [0, 1]$ die folgende a-priori-Abschätzung gilt: Löst $x \in X$ das Problem $L_t x = y$ mit $y \in Y$, dann ist $||x|| \leq M||y||$.

Man zeige, dass unter diesen Annahmen das Problem $L_1 x = y$ für alle $y \in Y$ eine eindeutige Lösung $x \in X$ besitzt.

Besprechung der Aufgaben: in der Übung am 26.05.2014.