Prof. Dr. Rico Zacher
Institut für Angewandte Analysis
Universität Ulm

SoSe 2014

Nichtlineare Funktionalanalysis

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (Euler-Bernoulli-Stab, vgl. Beispiel 4.17 Vorl.) Betrachtet wird das Problem

$$\begin{aligned} u''(s) + \lambda \sin\big(u(s)\big) &= 0, \quad s \in (0,1),\\ u'(0) = u'(1) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\lambda > 0$ ein reeller Parameter ist. $u \equiv 0$ ist stets Lösung. Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ bei $\lambda = \lambda_m := m^2\pi^2$ eine Verzweigung von der trivialen Lösung stattfindet.

Aufgabe 2. (i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y)$, und sei $a = (1,0)$. Zeigen Sie, dass $d(f, B_2(0), a) = 3$ gilt.
(ii) Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)f(b) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann $d(f,(a,b),0) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sgn}(f(b)) - \operatorname{sgn}(f(a))\big)$ gilt. (**Tipp:** Argumentieren Sie mit der Funktion $g(x) = \alpha x + \beta$, wobei α, β so gewählt werden, dass $f(a) = g(a)$ sowie $f(b) = g(b)$ gilt.)
(iii) Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x+y) &= 0,\\ x - 2y + \cos(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

eine Lösung in der Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ besitzt, falls $r > 1/\sqrt{5}$ gilt.
(iv) Zeigen Sie für $n = 1$, dass der Abbildungsgrad d surjektiv ist, d.h. zu jedem $m \in \mathbb{Z}$ gibt es ein zulässiges Tripel $(f, \Omega, 0)$ mit $d(f, \Omega, 0) = m$.
(v) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f, g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, und es gelte $||g(x)|| < ||f(x)||$ für alle $x \in \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass $d(f+g, \Omega, 0) = d(f, \Omega, 0)$ gilt. (Für analytische Funktionen ist diese Aussage als Satz von Rouché bekannt.)

Aufgabe 3. Es sei die Diagonalmatrix $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $d_{ii} = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $d_{nn} = -1$ gegeben. Sei $f(x) = Dx$, $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $d(f, B_1(0), 0) = -1$ gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes:
(i) Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es keine stetige Abbildung $f : \bar{\Omega} \to \partial\Omega$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in \partial\Omega$.
(ii) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gibt es ein $\lambda \geq 0$ und ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass $Ax = \lambda x$ gilt (Perron-Frobenius).

Besprechung der Aufgaben: in der Übung am 16.06.2014.