# Kapitle 3: Swaps und Forward Swaps

Stefan Ehrenfried

Institut für Finanzmathematik
Universität Ulm

13.12.2011

# Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen
2. Zinsswaps
3. Bewertung
   - 1-jähriger Forward-Swaps
   - Fixed for floating Zinsswaps

# Grundlagen

**Definition**

*Unter einem plain vanilla Swap versteht man den Austausch zweier Zahlungströme zwischen zwei Investoren. Dabei besteht einer der beiden Zahlungsströmen in der Regel aus festen, der andere Zahlungsstrom aus variablen Zahlungen zu bestimmten zukünftigen Zeitpunkten* $t_1, \ldots, t_n$.

# Wichtige Swaps

Durch Swaps wird der Austausch der Performance zweier Märkte ermöglicht. Wichtige Beispiele sind:

- Währungsswap: In einfachster Form beinhaltet er den Austausch von Nominalbetrag und Zinszahlung in einer Währung gegen Nominalbetrag und Zinszahlung in einer anderen Währung
- Equity-Swaps : Bei einem *Equity-Swap* handelt es sich um eine Vereinbarung über den Austausch der Gesamtrendite (Dividenden und Kapitalgewinne) eines Aktienindex gegen einen festen oder variablen Zinssatz.

# Zinsswaps

## Definition

*Der gebräuchlichste Swap ist ein Plain Vanilla Zinsswap. Darin verplichtet sich ein Unternehmen, Cash Flow in Höhe des Zinses zu einem vorher festgelegten Zinssatz auf einen fiktiven Nominalbetrag für eine bestimmte Anzahl von Jahren zu leisten. Im Gegenzug erhält es Zinsen zu einem variablen Satz auf das gleiche fiktive Nominalkapital für den gleichen Zeitraum. Daher werden diese Standard-Zinsswaps auch als "Fixed-for-Floating“ -Zinswaps bezeichnet.*

# Beispiel 1

Wir betrachten einen 6-Jahres-Swap zwischen Investor A und Investor B, der am 5.3.2012 beginnt.

- Nominalwert 100 Millionen Euro
- Investor A verpflichtet sich 5% Zinsen auf den Nominalwert an Investor B zu zahlen
- Investor B verpflichtet sich den jährlichen Euribor Zins auf den Nominalwert an Investor A zu zahlen
- Die jährlichen Euribor Zinsen sind geben durch 4.2%, 4.8%, 5.3%, 5.5%, 5.6%, 4.5%

Daraus ergibt sich folgender Zahlungsstrom für Investor A

# Beispiel 1

Die Zahlungsströme von Investor A werden in folgender Tabelle veranschaulicht:

| Datum | Zinssätze | Variabler | Fixer | Netto |
|---|---|---|---|---|
| 5.3.2012 | 4,20 | | | |
| 5.3.2013 | 4,80 | +4,2 | -5 | -0.8 |
| 5.3.2014 | 5,30 | +4,8 | -5 | -0.2 |
| 5.3.2015 | 5,50 | +5,3 | -5 | +0.3 |
| 5.3.2016 | 5,60 | +5,5 | -5 | +0.5 |
| 5.3.2017 | 4,50 | +5,6 | -5 | +0.6 |
| 5.3.2018 | | +4,5 | -5 | -0.5 |

# Einfache Spot-Rate

Im Folgenden bezeichne $P(t, T)$ den Preis eines Zero-Bonds zur Zeit $t$ mit Fälligkeit $T$

## Definition

*Die einfache Spot-Rate $L(t, T)$ ist der zur Zeit $t$ geltende Zinssatz mit Fälligkeit $T$, zu dem in $t$ $P(t, T)$ Geldeinheiten angelegt werden müssen, um in $T$ eine Geldeinheit zu erhalten, falls Zinsen proportional Anlagedauer entstehen, d.h.*

$$L(t, T) := \frac{1}{T - t}\left(\frac{1}{P(t, T)} - 1\right)$$

Die Definition ist äquivalent zu

$$P(t, T) \cdot (1 + (T - t)L(t, T)) = 1$$

$$\Rightarrow P(t, T) = \frac{1}{1 + (T - t)L(t, T)}$$

# Zero-Bond Preise

Je nach Konvention wird der Zinssatz proportional, diskret oder stetig gewählt. Entsprechend kann man den Preis des Zero-Bonds mit der jeweiligen Spot-Rate beschrieben. Wir betrachten hier nur proportionale und stetige Zinsen.

- einfacher Zero-Bond, d.h. Zinsen proportional Anlagedauer

$$P(t,T) = \frac{1}{1 + (T-t)L(t,T)}$$

- stetiger Zero-Bond mit stetiger Spot-Rate $R(t,T)$

$$P(t,T) = \exp(-(T-t)R(t,T))$$

# Stetige Spot-Rate

## Definition

*Die stetige Spot-Rate $R(t,T)$ ist der zur Zeit $t$ geltende Zinssatz mit Fälligkeit $T$, zu dem in $t$ $P(t,T)$ Geldeinheiten angelegt werden müssen, um in $T$ eine Geldeinheit zu erhalten, bei stetig Zinsen, d.h.*

$$R(t,T) := -\frac{\log(P(t,T)}{T-t})$$

$$\Leftrightarrow P(t,T) \cdot \exp((T-t)R(t,T)) = 1$$

# Bewertung von FRA‘s

- Betrachten wir zunächst den Spezialfall eines 1-jährigen Forward-Swaps.
- i.d.R. wird ein solcher Kontrakt mit FRA=Foward Rate Agreement bezeichnet.
- Investor A willigt ein Investor B zum Zeitpunkt $T + 1$ den Variablen Zinssatz $L(T, T + 1)$ auf den Nominalwert $N$ zu bezahlen
- Investor B willigt ein Investor A zum Zeitpunkt $T + 1$ den Festen Zinssatz $K$ (der im Voraus festgelegt ist) auf den Nominalwert $N$ zu bezahlen

# Bewertung von FRA's

- Der Wert des Kontraktes für Investor A zum Zeitpunkt $T+1$ ist gegeben durch

$$N \cdot (K - L(T, T+1))$$

$$= N \cdot (K - \frac{1}{P(T, T+1)} + 1) \tag{1}$$

- Der Wert des Kontraktes zum Zeitpunkt $t < T$ ist:

$$P(t, T+1) \cdot N \cdot (K - \frac{1}{P(T, T+1)} + 1)$$

$$= P(t, T+1) \cdot N \cdot (K+1) - N \frac{P(t, T+1)}{P(T, T+1)}$$

# Bewertung von FRA's

- bei der Bestimmung des Wertes von $\frac{P(t,T+1)}{P(T,T+1)}$ müssen wir in zwei Schritten vorgehen
  - der Wert $\frac{P(t,T+1)}{P(T,T+1)}$ zum Zeitpunkt $t = T$ ist 1
  - der Wert von 1 zum Zeitpunkt $t$ ist $P(t, T)$
- Insgesamt erhalten wir

$$FRA(t, T, T+1, N, K) = N \cdot \Big( P(t, T+1)(1+K) - P(t, T) \Big)$$

## Definition

*Der zur Zeit $t$ geltende einjährige Forward-Zinssatz $F(t, T, T+1)$ für den Zeitraum $[T, T+1]$ is definiert als derjenige feste Zinssatz $K$, der den Wert des entsprechenden FRA´s zum Zeitpunkt $t$ Null werden lässt, d.h.*

$$F(t, T, T+1) := \frac{P(t, T)}{P(t, T+1)} - 1$$

# Fixed for floating Zinsswaps

Die Verallgemeinerung des FRA´s ist der (fixed for floating) Zinsswap.

## Definition

*Seien* $0 \leq T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ *Zeitpunkte mit* $T_i - T_{i-1} = 1$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, *ein Nominalwert* $N > 0$ *und ein fixer Zinssatz* $K > 0$ *gegeben. Dann zahlt der Besitzer eines Payer-Swaps zu den Zeitpunkten* $T_1, \ldots, T_N$ *jeweils den Betrag* $K \cdot N$ *an seinen Vertragspartner und erhält im Gegenzug zu den Zeitpunkten* $T_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ *jeweils die variable Zahlung* $N \cdot L(T_{i-1}, T_i)$.

## Beachte:

*Die Zahlung* $N \cdot L(T_{i-1}, T_i)$ *wird zum Zeitpunkt* $T_{i-1}$ *fixiert und zum Zeitpunkt* $T_i$ *geleistet*

# Fixed for floating Zinsswaps

- Der Besitzer eines Payer-Swaps zahlt fixe und erhält variable Zahlungen
- Der Besitzer eines Receiver-Swaps zahlt variable und erhält fixe Zahlungen

# Fixed for floating Zinsswaps

Sei $0 \leq t \leq T_0$ der Zeitpunkt zu dem der Swap eingegangen wird.

- Gilt $t = T_0$ so spricht man von einem (spot-start)-Swap
- für $t < T_0$ von einem Forward-Swap

Den Wert eines Receiver-Swaps $RS(t, \mathcal{T}, N, K)$ mit , $\mathcal{T} := \{T_0, \ldots, T_n\}$ $N$ und $K$ wie oben gegeben erhalten wir über die Summe der Werte der Einzelzahlungen. Diese sind gegeben durch

$$FRA(t, T_{i-1}, T_i, N, K).$$

# Fixed for floating Zinsswaps

Insgesamt erhalten wir

$$RS(t, \mathcal{T}, N, K) = \sum_{i=1}^{n} FRA(t, T_{i-1}, T_i, N, K)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} N \cdot \Big( P(t, T_i)(1 + k) - P(t, T_{i-1}) \Big)$$

$$= NK \cdot \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i) + N \sum_{i=1}^{n} (P(t, T_i) - P(t, T_{i-1})$$

$$= N \Big( K \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i) - P(t, T_0) + P(t, T_n) \Big)$$

## Definition

*Die (Forward)-Swap-Rate $S_{T_0,T_n}(t)$ zur Zeit $t$ ist definiert als der fixe Zinssatz $K^*$ für welchen $RS(t, \mathcal{T}, N, K^*) = 0$ gilt. D.h.*

$$S_{T_0,T_n}(t) := \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)}.$$

## Bemerkung

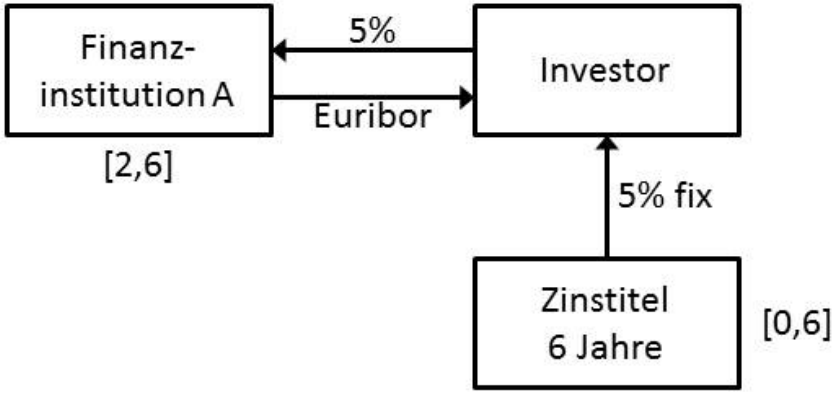
*Im Spezialfall: Normaler Swap(Spot-start) $(t = T_0)$ ist die Swap-Rate geben durch*

$$S_{T_0,T_n}(T_0) := \frac{1 - P(t, T_n)}{\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)}.$$

# Beispiel 2: Aktives Zins-Management mit Swaps

- Ein Investor habe vor 2 Jahren ein Schuldschein-Darlehen mit 5% Nominalverzinsung und 6 Jahren Laufzeit erworben.
- Heutige Erwartung: Gelmarktzinsen steigen mittelfristig deutlich über 5%
- $\Rightarrow$ Investor schließt Payer-Swap mit Restlaufzeit 4 Jahren ab und einem festen Zinssatz von 5%

# Beispiel 2: Aktives Zins-Management mit Swaps



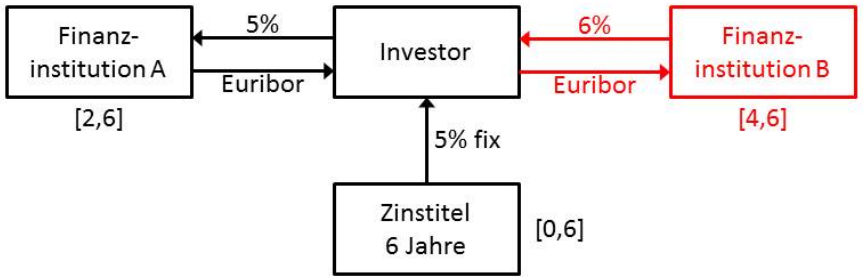
# Beispiel 2: Aktives Zins-Management mit Swaps

Annnahmen:

- Antizipierte Zinssteigerung sei eingetreten Zinsen nach 2 Jahren: 7%
- Der Investor erwarte fallende Zinsen und möchte das mittels des ersten Swaps erreichte Zinsniveau immunisieren
- Der Swap-Satz für einen 2-jährigen Swap betrage in $t = 4$ 6%

# Beispiel 2: Aktives Zins-Management mit Swaps

- $\Rightarrow$ Investor geht Receiver-Swap mit Restlaufzeit 2Jahren




ein

- $\Rightarrow$ In den letzten beiden Jahren ist es dem Investor insbesondere gelungen, einem Zusatzertrag von 1% mit Sicherheit zu erwirtschaften.

# Beispiel 2: Aktives Zins-Management mit Swaps

**Bemerkung**

*Swaps können nicht nur zum Absichern verwendet werden sondern auch um aktiv zu spekulieren.*
*Problem: Tatsächliche Zinsentwicklung muss nicht mit der Antizipierten übereinstimmen.*

# Beispiel 3: Cashflow Matching mit Swaps

Ein Versicherungsunternehmen habe Verbindlichkeiten in Höhe von 100 Euro, die in 5 Jahren fällig seien.
Am Markt existieren:

- Zero-Bonds mit Laufzeit 3 Jahre
- Forward Swaps für den Zeitraum $[3, 5]$
- Kapital kann außerdem jederzeit für 1-Jahr angelegt werden ( zum jeweils dann gültigen 1-Jahres Marktzinssatz).

# Beispiel 3: Cashflow Matching mit Swaps

Heutige Marktdaten:

- Stetige Spot-Rate $R(0,3) = 4\%$
- Forward Swap-Rate $S_{3,5}(0) = 5\%$

a) Welchen Betrag muss das Versicherungsunternehmen heute anlegen um mit völliger Sicherheit seiner Zahlungsverpflichtung nachkommen zu können ? Wie sieht das Portfolio aus?

b) Wieviel Kapital muss investiert werden falls sämtliche Zinssätze im gesamten Planungszeitraum stets über 2% notieren? Mit bzw. ohne Swaps?

# Lösung

a)Heute:

- Anlage von $X$ Euro in Zero-Bonds
- Eingehen eines Receiver-Forward Swaps mit $N = \frac{X}{P(0,3)}$

# Lösung

| Zukünftiger Cashflow | |
|---|---|
| T=3 | |
| Zero-Bond | $+Xe^{0.04\cdot 3} = N$ |
| Investition in Zero-Bond mit Laufzeit 1 | $-Xe^{0.04\cdot 3} = -N$ |
| $\sum$ | 0 |
| T=4 | |
| Swap | $+KN$ |
| | $-(\frac{1}{P(3,4)} - 1)N$ |
| Zerobonds | $+\frac{1}{P(3,4)}N$ |
| Zwischensumme | $(1+K)N$ |
| Reinvestition in Zero-Bonds | $-(1+K)N$ |
| $\sum$ | 0 |

# Lösung

| Zukünftiger Cashflow | |
|---|---|
| T=5 | |
| Swap | $+KN$ |
| | $-(\frac{1}{P(4,5)} - 1)N$ |
| Zero-Bonds | $\frac{1}{P(4,5)}(1+K)N$ |
| $\sum$ | $(1 + K + \frac{K}{P(4,5)})N$ |

Beachte:

- $P(3,4)$ erst ab Zeitpunkt 3 bekannt
- $P(4,5)$ unbekannt

$\Rightarrow$ Cashflow in $T = 5$ ist

$$(1 + K + \frac{K}{P(4,5)})Xe^{0,12} \geq (1 + 2K)Xe^{0,12} = 100$$

$$\Rightarrow X = \frac{100}{e^{0,12}(1 + 2K)} \approx 80,62$$

# Lösung

b) Alle Zinsen stets $\geq 2\%$

- Mit Swap:

$$(1 + K + \frac{K}{P(4,5)})NXe^{0,12} \geq (1 + k\frac{1}{e^{-0,02}})Xe^{0,12} = 100$$

$$\Rightarrow X \approx 80,55$$

- Ohne Swap

$$Xe^{0,12}e^{R(3,5)\cdot 2} \geq X \cdot e^{0,12} \cdot e^{0,02\cdot 2} = 100$$

$$\Rightarrow X \approx 85,21$$

Problem: Stark vereinfachtes Beispiel, normal längere Laufzeiten

- Lineares Optimierungsproblem
  - alle Zeitpunkte einbeziehen
  - Wiederanlagerisiko der $N$ ‘s mit einbeziehen
- Swaps nicht in beliebiger Laufzeit verfügbar