

# Aspekte der stochastischen Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten in Kreditportfoliomodellen

von

Rüdiger Kiesel, London School of Economics and Political Sciences, London.  
Bernd Schmid, Risklab Germany, München.

## 1. Einleitung.

Die zentrale Bedeutung des Kreditrisikos (im weitesten Sinn die Gefahr der Bonitätsverschlechterung eines Kreditnehmers) als dominantes Risikoelement in den Büchern der meisten Banken und Finanzinstituten ist in den letzten Jahren zunehmend deutlich geworden, nicht zuletzt durch Fälle finanzieller Instabilität, die durch Missmanagement des Kreditrisikos (Cauette, Altman und Narayanan (1998)) verursacht worden waren. Es herrscht Übereinstimmung, dass ein verbessertes Verständnis der speziellen Eigenarten des Kreditrisikos verbunden mit einer Verbesserung der Quantifizierung und des Managements sowohl für individuelle Banken als auch für das internationale Finanzsystem wünschenswert wäre. Diese Erkenntnis hat bereits zu einer Verstärkung der kreditbezogenen Forschungsanstrengungen innerhalb von Finanzinstituten, Zentralbanken, Regulatoren und Universitäten geführt. Besonders Finanzinstitute waren führend in der Entwicklung von Kreditrisikomodellen, die Kredit-Exposures besser bewerten und die interne Kapitalallokation verbessern sollten. Regulatoren haben sich zum Ziel gesetzt, die Richtlinien zur Festlegung von regulatorischem Kapital dem tatsächlichen Risiko besser als im 1988 Baseler Akkord anzupassen (Banken haben die Lücken im 1988 Baseler Akkord zur Durchführung substantieller regulatorischer Abitrage genutzt, siehe etwa Jackson et al (1999) oder Jones (1999)).

In Praxis wie Forschung herrscht weitgehend Übereinstimmung, dass ein realistischer Kreditrisikomodellierungsansatz folgende wichtige Komponenten beinhalten muss (siehe etwa Ong (1999)):

- (1) Ausfallwahrscheinlichkeiten (Default Probabilities): Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuldner seine finanziellen Verbindlichkeiten nicht mehr erfüllen kann.
- (2) Rückflussquoten (Recovery Rates): Der prozentuale Anteil des Nennwertes der finanziellen Verpflichtung des Schuldners, der im Falle eines Ausfalls kompensiert wird.
- (3) Übergangswahrscheinlichkeiten (Transition Probabilities): Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kreditqualität eines Schuldners sich verbessert oder verschlechtert (ohne dass es zu einem Ausfall kommt).
- (4) Korrelation des Ausfallrisikos bzw. der Kreditqualität verschiedener Schuldner: Das Ausmaß der Beziehung des Ausfallrisikos bzw. der Kreditqualität verschiedener Schuldner.
- (5) Risikobeitrag und Konzentration von Kreditrisiken: Der Beitrag eines individuellen Finanzinstruments oder eines individuellen Schuldners zum Gesamtrisiko eines Kreditportfolios.

Bei den Punkten (1) – (3) handelt es sich um individuelle Risikoelemente, die sich auf ein einzelnes Finanzinstrument beziehen, während (4) und (5) für Portfolios von ausschlaggebender Bedeutung sind.

Mittlerweile gibt es eine Vielzahl von Arbeiten, die die Umsetzung der obigen Liste in den in der Praxis verwendeten Kreditrisikomodellen beschreiben, etwa die Bücher Cauette, Altman und Narayanan (1998), Das (1998), Ong (1999) und Saunders (1999) oder die Artikel Alexander und Phelan (1999), Crouhy, Galai und Mark (1999), Gordy (1999) und Schmid (1998). Wir verzichten deshalb auf eine zusammenfassende Beschreibung und konzentrieren uns darauf, die stochastischen und statistischen Annahmen und Techniken herauszuarbeiten, die bei der Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten verwendet werden. Die Konzentration auf Ausfallwahrscheinlichkeiten liegt in deren dominierender Rolle begründet, die sie bei der Modellierung individueller Kreditrisiken und Kreditportfoliorisiken spielen. Wir werden in unseren Ausführungen jedoch auch auf Aspekte der in (2) bis (5) erwähnten Größen und deren Einfluß auf Kreditrisiken zu sprechen kommen.

Im Zusammenhang mit Ausfallrisiken wollen wir insbesondere die folgenden Fragen erörtern:

- (i) Welche verschiedenen Ansätze zur Modellierung von Ausfallrisiken gibt es?
- (ii) Welche statistische Fragestellungen werfen die einzelnen Modellierungsansätze auf?
- (iii) Welche Auswirkungen haben die verschiedenen Modellierungsansätze auf Risikokenngrößen?

Wir beginnen im nächsten Abschnitt mit einer Zusammenfassung der grundlegenden Bewertungsideen für (kreditrisikobehaftete) Wertpapiere und der Vorstellung der gängigen Kenngrößen für das Kreditrisiko solcher Wertpapiere. Im darauf folgenden Abschnitt diskutieren wir die verschiedenen Ansätze zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit von Schuldnern, die über die Ausgabe von Wertpapieren oder die Inanspruchnahme von Krediten Zahlungsverpflichtungen eingegangen sind. In einem weiteren Abschnitt betrachten wir dann verschiedene Aspekte des Kreditrisikos von Portfolios kreditrisikobehafteter Wertpapiere und schließen mit einer Zusammenfassung der Erkenntnisse, die für die Beantwortung der obigen Fragen relevant sind.

## 2. Kreditrisikobehaftete Wertpapiere -- Modellierung und Kenngrößen

Die grundlegende Formel zur Bewertung risikobehafteter Zahlungsströme (gegeben durch Finanzinstrumente) in einem arbitragefreien Finanzmarktmodell ist durch das risikoneutrale Bewertungsprinzip gegeben (siehe etwa Bingham und Kiesel (1998) für eine Einführung in die Thematik). Danach ist der Preis zum Zeitpunkt  $t$  einer risikobehafteten Auszahlung  $X$  zum Zeitpunkt  $T$  durch den Erwartungswert bezüglich eines sogenannten äquivalenten Martingalmaßes gegeben:

$$X(t, T) = E_t \left[ X \exp \left( - \int_t^T r_u du \right) \right] \quad (2.1.)$$

Dabei ist  $r_t$  der Spot-Zinssatz und  $E_t$  ein bedingter Erwartungswert (qualitativ wird dadurch der Preis der Auszahlung von den vorhandenen Informationen für die Investoren abhängig gemacht). Bei der Modellierung einer kreditrisikobehafteten Auszahlung muss zusätzlich noch die Möglichkeit eines Ausfalles in Betracht gezogen werden. Dazu führt man die Zeit des Ausfalles  $\tau$  und die Rückflussquote  $R$ , gegeben ein Ausfall, in das Modell ein und erhält

$$X(t, T) = E_t \left[ I_{\{T < \tau\}} X \exp \left( - \int_t^T r_u du \right) + I_{\{T \geq \tau\}} R X \exp \left( - \int_t^T r_u du \right) \right], \quad (2.2)$$

wobei  $I_{\{T < \tau\}}$  im Falle eines Ausfalls gleich 1 und sonst 0 ist (d.h.  $I$  ist die Indikatorfunktion der Menge  $\{T < \tau\}$ ).

$$I_{\{T < \tau\}} X \exp \left( - \int_t^T r_u du \right)$$

Das Problem der Modellierung der Ausfallzeit wird in der Literatur im Prinzip mittels zweier verschiedener Ansätze betrachtet (eine detaillierte Diskussion wird in Ammann (1999) gegeben). Im strukturellen Ansatz, der auf Arbeiten von Merton (Merton 1973, Merton 1974) basiert, ist die Ausfallzeit durch den Zeitpunkt gegeben, an dem der Wert eines Preisprozesses eine Schranke durchbricht (in der mathematischen Terminologie Stoppzeit genannt). In diesem Fall kann durch Beobachtung des Preisprozesses die Ausfallzeit -- und damit auch die Ausfallwahrscheinlichkeit -- vorhergesagt werden. Eine andere Klasse von Modellen folgt dem sogenannten intensitätsbasierenden Ansatz (folgend Jarrow, Lando und Turnbull (1997)). Dabei wird die Ausfallzeit durch den ersten Sprung eines exogenen Sprungprozesses (etwa eines Poissonprozesses) modelliert und kann damit nicht durch preisbezogene Informationen alleine vorhergesagt werden. Eine Konsequenz dieses Ansatzes ist, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit ebenfalls von exogenen Faktoren abhängig ist, die üblicherweise in der Intensität des Sprungprozesses beinhaltet sind. Die Attraktivität des intensitätsbezogenen Ansatzes erklärt sich vor allem aus der Tatsache, dass (unter geeigneten technischen Annahmen) der Intensitätsprozess in eine Änderung des Zinsprozesses transformiert werden kann und dadurch eine geschlossene Bewertungsformel vergleichbar zu (2.1) erhalten werden kann.

Eine Transformation des Wahrscheinlichkeitsmaßes (ein Übergang zum sogenannten äquivalenten T-Forward Maß) ermöglicht es, den Wert einer kreditrisikobehafteten Auszahlung mittels dem Preisprozess  $p(t, T)$  einer risikofreien Auszahlung (der entsprechenden Nullkupon-Anleihe) auszudrücken (dabei setzen wir zur Vereinfachung  $X=1$ ):

$$X(t, T) = p(t, T) E_t [ I_{\{T < \tau\}} + I_{\{T \geq \tau\}} R ] = p(t, T) (R + (1-R) Q(\tau > T)), \quad (2.3)$$

wobei  $Q(\tau \leq T)$  die Ausfallwahrscheinlichkeit (unter dem veränderten Wahrscheinlichkeitsmaß unter Berücksichtigung aller im Zeitpunkt  $t$  bekannten Informationen) quantifiziert. Formel (2.3) erlaubt eine einfache Interpretation: der Wert eines kreditrisikobehafteten Wertpapiers ergibt sich als die Summe des Wertes einer risikofreien Auszahlung  $R X$  (Rückflussquote multipliziert mit dem Nennwert) und dem Erwartungswert einer risikobehafteten Auszahlung  $(1-R)X$ .

Wir können Formel (2.3) nun verwenden, um gewisse in der Praxis weit verbreitete Risikokenngrößen zu ermitteln. Eine erste und grundlegende Frage ist: Welchen durchschnittlichen Verlust erwarten wir im Falle eines Ausfalls? Eine Umformung der Gleichung (2.3) liefert

$$X(t, T) = p(t, T) (1 + (1-R) Q(\tau \leq T)) \quad (2.4)$$

und damit

$$p(t, T) - X(t, T) = p(t, T)(1 - R)Q(\tau \leq T). \quad (2.5)$$

Die linke Seite der Gleichung (2.5) stellt nun den erwarteten Verlust im Falle eines Ausfalls dar (i.e. die Differenz zwischen einer risikofreien und einer risikobehafteten Auszahlung). Wir bezeichnen diese Grösse als den erwarteten Verlust (expected loss) EL. Typischerweise fragt man in diesem Kontext anstelle nach dem prozentualen Rückfluss (quantifiziert durch die Rückflussquote R) eher nach der Höhe des Verlusts im Falle des Ausfalls. Wir führen daher in Gleichung (2.5) den Verlust gegeben Ausfall (loss given default) LGD ein und erhalten für den erwarteten Verlust

$$EL = p(t, T) \times LGD \times Q(\tau \leq T). \quad (2.6)$$

Der "Diskontierungsfaktor"  $p(t, T)$  in obigen Formeln bewirkt eine "mark-to-market" Bewertung: Alle Bewertungen werden zu heutigen (Zeitpunkt t) Preisen durchgeführt. Zur Vereinfachung verzichten wir im Weiteren auf eine solche Diskontierung und bewerten alle Grössen mit Fälligkeit (Zeitpunkt T) Preisen. Weiterhin verzichten wir auf die explizite Darstellung der Ausfallwahrscheinlichkeit mittels der (stochastischen) Ausfallzeit und benutzen die gebräuchlichere (und leichter zu interpretierende) erwartete Ausfallhäufigkeit (expected default frequency) EDF. Somit folgt für den erwarteten Verlust

$$EL = X \times LGD \times EDF. \quad (2.7)$$

Die Aussagekraft des erwarteten Verlusts EL als Risikokenngröße ist begrenzt; schliesslich wird nur ein durchschnittlicher Verlust berechnet, wohingegen Risiko gemeinhin als Auswirkung unerwarteter Schwankungen aufgefasst wird. Um diese Schwankungen um den erwarteten Verlust zu messen, bestimmen wir die Standardabweichung (Volatilität) des Wertes der kreditrisikobehafteten Auszahlung zur Fälligkeit. (Im Rahmen der dynamischen Analyse, mit Diskontierung, würden wir einfach die Standardabweichung des Wertprozesses (2.4) bestimmen). Wir bezeichnen diese Grösse als unerwarteten Verlust (unexpected loss) UL. Modellieren wir die Verlusthöhe LGD als eine von den Ausfallhäufigkeiten unabhängige stochastische Variable, so erhalten wir

$$UL = \sqrt{\text{var}(X(T, T))} = X \times \sqrt{EDF \times \sigma_{LGD}^2 + LGD \times \sigma_{EDF}^2}, \quad (2.8)$$

wobei  $\sigma_{LGD}^2$  die Varianz der Verlusthöhe und  $\sigma_{EDF}^2 = EDF(1 - EDF)$  die Varianz der Ausfallwahrscheinlichkeit bezeichnet.

Eine oft übersehene Tatsache ist der konzeptionelle Unterschied der Risikokenngrößen erwarteter und unerwarteter Verlust: der erwartete Verlust EL ist eine bedingte Grösse -- der durchschnittliche Verlust gegeben ein Ausfall -- und damit abhängig vom Eintreten des Ausfallereignisses. Der unerwartete Verlust UL hingegen ist eine Kenngröße der (unbedingten) Werteverteilung der risikobehafteten Auszahlung zum Fälligkeitszeitpunkt, und nicht etwa eine weitere Kenngröße einer bedingten Grösse (Verlust gegeben Ausfall). Somit werden potenziell im unerwarteten Verlust UL auch positive Wertentwicklungen erfasst und zur Risikomessung herangezogen. Da aber kreditrisikobehaftete Wertpapiere typischerweise nur

begrenzttes Gewinnpotenzial im Vergleich zum Verlustrisiko besitzen, sind Wertschwankungen im wesentlichen auf Verluste zurückzuführen.

Die Formeln (2.7) und (2.8) machen deutlich, dass Ausfallwahrscheinlichkeiten und Rückflussquoten die entscheidenden Größen bei der Quantifizierung von Ausfallrisiken sind. Wir werden die verschiedenen Ansätze zur Modellierung der Ausfallwahrscheinlichkeiten in den folgenden Abschnitten detailliert diskutieren.

Bei der Modellierung der Rückflussquoten können im Prinzip zwei Strategien verfolgt werden: Entweder man modelliert die Verlustgröße als eine stochastische Variable -- wie bei der Herleitung der Formeln (2.7) und (2.8) mit gegebenem Erwartungswert und gegebener Varianz oder spezieller mit einer bestimmten Verteilung -- oder als eine Konstante (wodurch sich der erste Summand unter der Wurzel in (2.8) erübrigt, da die Varianz dann Null ist).

Analysen der Veränderung der Risikokenngrößen in Bezug auf die zugrundeliegenden Faktoren haben gezeigt, dass die Sensitivität der meisten Kenngrößen bezüglich der Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit am größten ist. Recovery Rates spielen oft nur eine untergeordnete Rolle und bewirken nur moderate Veränderungen der Kenngrößen. Auf dieser Grundlage erscheint oft die Annahme einer konstanten Recovery Rate gerechtfertigt.

Entschließt man sich zu einer stochastischen Modellierung, so wird diese üblicherweise auf der Grundlage historischer Daten aus dem Corporate Bond Sektor vorgenommen. Bonds werden dazu in Seniority Classes eingeteilt. Man unterscheidet zwischen Senior Secured, Senior Unsecured, Senior Subordinated, Subordinated und Junior Subordinated. In Tabelle 1 sind die Ergebnisse einer Untersuchung von Carty & Lieberman (1996) aufgeführt, die durchschnittliche Recovery Rates für die einzelnen Seniority Classes bestimmt haben. Die Schätzung der Recovery Rate aus historischen Daten ist allerdings in verschiedener Hinsicht äußerst problematisch. Häufig können keine Marktpreise oder nur welche auf einem höchst illiquiden Markt beobachtet werden. Auch der Zeitpunkt für die Feststellung des Preises ist weitgehend unklar. Verschiedene Studien kommen zu dem Schluß, daß ungefähr ein Monat nach Bekanntgabe des Defaults der beste Zeitpunkt dafür ist.

<b>Seniority Class</b>	<b>Recovery Rate</b>	<b>Standardabweichung</b>
Senior Secured	53.80%	26.86%
Senior Unsecured	51.13%	25.45%
Senior Subordinated	38.52%	23.81%
Subordinated	32.74%	20.18%
Junior Subordinated	17.09%	10.90%

Tabelle 1: Durchschnittliche Recovery Rates aus historischen Daten  
Quelle: Moody's Investors Service

Weitere Beispiele empirischer Recovery Rates und Literaturhinweise finden sich in Ong (1999), Kapitel 4, oder im CreditMetrics Manual (Gupton, Finger und Bhatia 1997), Kapitel 7. Für eine Modellierung der Verteilung der Recovery Rates wird eine

Wahrscheinlichkeitsverteilung mit kompaktem Wertebereich (Werte der Recovery Rates sind zwischen 0 und 100%) benötigt. Üblicherweise wird in der Praxis eine Beta-Verteilung angenommen.

Als Beispiel für obige Ausführungen betrachten wir den erwarteten und unerwarteten Verlust eines Kredits dessen Ausfallwahrscheinlichkeit mit  $EDF = 0.0017$  (oft wird die Wahrscheinlichkeit in % angegeben, hier also 0.17%) ermittelt worden ist. Wir nehmen weiter eine Einstufung als "Senior Secured" an. Damit ist die Rückflussquote (gemäß Tabelle 1) 53.80%, und es ergibt sich für den erwarteten Verlust pro Geldeinheit der Rückzahlung

$$EL = 0.0017 \times (1 - 0.538) = 0.000785,$$

oder  $EL = 0.0785\%$ . Um den unerwarteten Verlust  $UL$  zu bestimmen, müssen wir die "Varianz" der Ausfallwahrscheinlichkeit ermitteln. Es ergibt sich  $\sigma_{EDF}^2 = 0.0017 \times (1 - 0.0017) = 0.00169$ . Damit folgt für den unerwarteten Verlust

$$UL = \sqrt{0.0017 \times 0.2686 + (1 - 0.538) \times 0.00169} = 0.0258,$$

oder  $UL = 2.581\%$ . Ein Vergleich der Größen zeigt, dass der unerwartete Verlust den erwarteten Verlust substanziell übertreffen kann, und daher als Risikokenngröße nicht zu vernachlässigen ist.

### 3. Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten

Die beiden im letzten Abschnitt angesprochenen Ansätze zur Modellierung der zufälligen Ausfallzeit eines kreditrisikobehafteten Wertpapiers -- strukturell und intensitätsbasierend -- finden sich bei der Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten (in den kommerziellen Modellen) wieder. Darüber hinaus ist es naheliegend, einen ökonometrischen, datenbasierenden Ansatz zu verfolgen.

#### 3.1. Struktureller (Merton) Ansatz:

Die zu Grunde liegende Motivation dieses Ansatzes ist die Idee, dass ein Unternehmen in Konkurs geht, sobald ein Preis-, Wert-, oder Signalprozess eine endogen definierte Ausfallschranke (Default Point) unterschreitet. Wir wollen uns hier auf die Arbeiten von Robert Merton (Merton (1973), Merton (1974)) beruhende Standardmodell beschränken. Ausfallwahrscheinlichkeiten werden in diesem Rahmen auf Grundlage des Firmenwertes (Aktiva der Firma) und der Höhe der Verbindlichkeiten des Unternehmens bestimmt. Bezeichnet man den Firmenwert zum Zeitpunkt  $t$  mit  $V_t$  und die Ausfallschranke mit  $D$ , so ist die mathematische Beschreibung der Ausfallwahrscheinlichkeit (EDF) der Firma zum Ende des Beobachtungszeitraumes  $T$  gegeben durch

$$EDF = \Pr(V_T \leq D). \quad (3.1)$$

Damit nimmt das Ausfallrisiko zu, wenn sich die Differenz aus Firmenwert und Verbindlichkeiten verkleinert und nimmt ab, wenn sich diese Differenz vergrößert. Diese Beobachtung kann verwendet werden, um eine Klassifizierung der Kreditqualität von Unternehmen vorzunehmen. Dazu wird obige Differenz durch die Volatilität des Firmenwertes  $\sigma_V$  standardisiert und eine sogenannte "Distance to Default"  $DD$  wie folgt definiert

$$DD = \frac{\text{Erwarteter Firmenwert} - \text{Ausfallschranke}}{\text{Firmenwertvolatilität}} \quad (3.2)$$

Da weder Firmenwert noch die Volatilität des Firmenwerts direkt beobachtbar sind, wird ein optionspreistheoretischer Ansatz benutzt, um diese Größen aus dem Aktienpreisprozess des Unternehmens zu bestimmen.

Dabei folgt man üblicherweise Mertons Ansatz von 1974 und modelliert die zeitliche Entwicklung des Firmenwerts (unter einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß) mit Hilfe der stochastischen Differentialgleichung

$$dV_t = V_t r dt + V_t \sigma_V dW_t, \quad (3.3)$$

wobei  $r$  die risikofreie konstante Wachstumsrate im risikoneutralen Modell und  $W_t$  eine standardisierte Brownsche Bewegung bezeichnen.

Abbildung 1 fasst diese Überlegungen noch einmal zusammen:

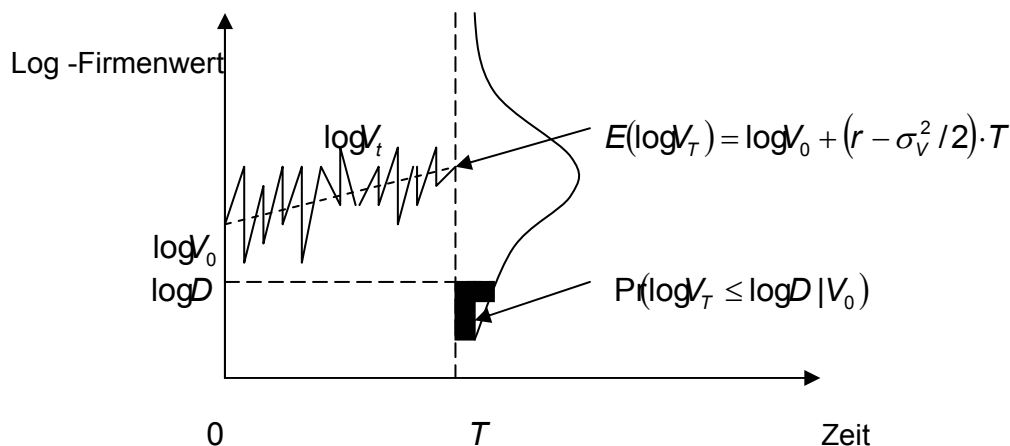


Abbildung 1: Verteilung des logarithmierten Firmenwerts am Ende des betrachteten Zeithorizonts unter dem tatsächlichen Wahrscheinlichkeitsmaß.

Bei der Anwendung des Modells ergibt sich ein zentrales Problem: Sowohl der aktuelle Firmenwert  $V_0$  als auch die Volatilität des Firmenwerts  $\sigma_V$  sind nicht beobachtbar.

Mit Hilfe von Informationen über den Aktienkurs bzw. die Marktkapitalisierung der Firma und deren Volatilität versucht man Informationen über den Firmenwert und dessen Volatilität zu generieren:

Geht man davon aus, dass sich die Firma nur durch ihr Eigenkapital und durch Fremdkapital in Form von Discount Bonds mit Nominalwert  $D$  finanziert und der Firmenwert sich aus der Summe von Eigen- und Fremdkapital zusammensetzt, so

ergeben sich für die Aktionäre und die Gläubiger einer Firma folgende Optionspositionen:

- Unter der Annahme, dass die Gläubiger bei der Fremdkapitalaufnahme der Firma diese von den Aktionären kaufen, gibt es bei Fälligkeit der Schulden im Zeitpunkt  $T$  zwei Möglichkeiten: die Gläubiger bekommen von den Aktionären die Schulden zurückbezahlt oder die Firma geht endgültig in deren Besitz über, d.h. es ergibt sich eine Payoff-Struktur von  $\min(D, V_T)$ , was auch als  $D - \max(0, D - V_T)$  ausgedrückt werden kann. Damit entspricht der Wert der Verbindlichkeiten der Firma dem Wert einer risikolosen Anlage in Höhe des Barwerts von  $D$  minus dem Wert einer Put-Option auf den Wert der Firma.
- Unter der Annahme, dass die Aktionäre bei der Fremdkapitalaufnahme die Firma an die Gläubiger verkaufen, gibt es bei Fälligkeit dieser Verbindlichkeiten im Zeitpunkt  $T$  zwei Möglichkeiten: die Aktionäre sind in der Lage, die Verbindlichkeiten zurückzubezahlen und damit die Firma zurückzukaufen, oder die Firma geht ganz in den Besitz der Schuldner über. Damit ergibt sich in  $T$  eine Payoff-Struktur von  $\max(0, V_T - D)$ . Das entspricht aber gerade dem Payoff einer Call-Option auf den Wert der Firma im Zeitpunkt  $T$ , und damit kann das Eigenkapital der Firma bzw. der Marktwert der Aktien als Call-Option auf den Firmenwert aufgefasst werden.

Somit erlaubt die Black-Merton-Scholes Preisformel für europäische Call-Optionen einen Zusammenhang zwischen Aktienpreisprozess  $E_t$  und Volatilität des Aktienpreisprozesses  $\sigma_t$  auf der einen und Firmenwertprozess  $V_t$  und Volatilität des Firmenwertprozesses  $\sigma_V$  auf der anderen Seite herzustellen (wobei wir wie oben  $t=0$  annehmen und auf Indizes in der Formel verzichten):

$$E = VN(d_1) - De^{-rT}N(d_2), \quad (3.4)$$

wobei  $N$  die kumulative Normalverteilung bezeichnet und  $d_1$  bzw.  $d_2$  durch

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \quad \text{bzw.} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T} \quad \text{gegeben sind.}$$

Eine Anwendung der Itô-Formel erlaubt es die stochastische Differentialgleichung des Aktienpreisprozesses aus der stochastischen Differentialgleichung des Firmenwertprozesses (3.3) herzuleiten (siehe etwa Bingham und Kiesel (1998) §5.5.—5.8 für eine Einführung in die Theorie des Itô-Kalküls und insbesondere §6.2.3 für eine Herleitung der stochastischen Differentialgleichung einer Call Option):

$$\frac{dE_t}{E_t} = rdt + \frac{N(d_1(t))V_t\sigma_V}{E_t}dW_t.$$

(dabei ist  $d_1(t)$  definiert indem man  $T$  durch  $(T-t)$  in obiger Definition ersetzt). Damit lässt sich die Volatilität des Aktienkurses  $\sigma_E$  mit Hilfe der Volatilität des Firmenwerts  $\sigma_V$  ausdrücken:

$$\sigma_E = \frac{N(d_1)\sigma_V}{E}. \quad (3.5)$$



Mit Hilfe der Formeln (3.4) und (3.5) kann man nun den aktuellen Firmenwert  $V$  und die Volatilität des Firmenwerts  $\sigma_V$  aus den beobachtbaren Aktienkursen und der beobachtbaren Volatilität der Aktienkurse bestimmen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit der Firma  $p^d$ , kann dann durch

$$p^d = P(V_T \leq D) = \Pr \left( W_T \leq - \frac{\ln\left(\frac{V}{D}\right) + \left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \right) = N(-d_2) \quad (3.6)$$

berechnet werden. Eine kurze Rechnung zeigt, dass gilt

$$d_2 = \frac{E(\log(V_T)) - \log D}{\sigma_V \sqrt{T}}.$$

Daher wird  $d_2$  häufig als Distance to Default bezeichnet (beachte, dass  $\sigma_V$  die Volatilität des logarithmierten Firmenpreisprozesses ist).

Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p^d$  wurde in einem risikoneutralen Modell entwickelt und ist daher nicht direkt mit empirisch beobachtbaren Ausfallwahrscheinlichkeiten (den EDFs) vergleichbar. Im empirischen Modell wird die erwartete Wachstumsrate des Firmenprozesses  $\mu_V$  verwendet, während im risikoneutralen Modell die risikofreie Rate  $r$  verwendet wird. Die Beziehung zwischen risikoneutralem und empirischem Modell erlaubt es die beobachtbaren Ausfallwahrscheinlichkeiten als

$$EDF = N(-\bar{d}_2),$$

zu bestimmen, wobei  $\bar{d}_2$  durch

$$\bar{d}_2 = d_2 + \frac{(\mu_V - r)T}{\sigma_V \sqrt{T}}$$

gegeben ist ( $\bar{d}_2$  wird auch als tatsächliche Distance to Default und  $d_2$  dann als risikoneutrale Distance to Default bezeichnet). Da die erwartete Wachstumsrate größer als die risikofreie Rate ist (d.h.  $\mu_V \geq r$ ), folgt  $p^d \geq EDF$ , d.h. die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit ist größer als die beobachtbare Ausfallwahrscheinlichkeit.

Qualitativ können die Ausfallwahrscheinlichkeiten sowohl beim risikoneutralen als auch empirischen Vorgehen als Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable unter einen kritischen Wert fällt.

Das strukturelle Modell ist der Rahmen des von KMV (einer Software/Beratungsfirma die insbesondere Dienstleistungen zum Management von Kreditrisiken anbietet) entwickelten Kreditrisikomodelles (und Softwaretools) Portfolio Manager. Aber auch das auf Ratingklassen beruhende CreditMetrics (entwickelt von JP Morgan) benutzt Ideen dieses Ansatzes (insbesondere bei der Modellierung von Korrelationen, vgl. Abschnitt 4.2).

### 3.2 Der intensitätsbasierende Ansatz

Im intensitätsbasierenden Ansatz der Modellierung von Ausfallereignissen ist die Ausfallintensität die zentrale Grösse. Unter der Ausfallintensität versteht man die durchschnittliche Ausfallrate, gegeben alle aktuell verfügbaren Informationen, gemessen als erwartete Anzahl von Ausfällen pro Jahr. Ein Intensitätsparameterwert von 0.12% würde damit z.B. eine Ausfallrate von 12 Schuldern pro 10 000 Schuldnern bedeuten. Ein einfaches Beispiel dieses Ansatzes ist die Modellierung des Zeitpunktes des Eintretens eines Ausfalls durch den ersten „Sprung“ eines Poisson Prozesses mit einem konstanten Intensitätsparameter  $\lambda > 0$ . In diesem Modell ist die Überlebenswahrscheinlichkeit (Wartezeit bis zum ersten Sprung) exponential verteilt, somit beträgt die Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Jahr  $e^{-\lambda}$  und für  $t$  Jahre  $e^{-\lambda t}$ . Die Annahme eines konstanten Intensitätsparameters hat also zur Folge, dass die Überlebenswahrscheinlichkeiten für eine feste Zeitspanne (von z.B. einem Jahr) über die Zeit konstant sind. Da Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeiten stark von makroökonomischen Größen beeinflusst werden, ist die Annahme eines konstanten Intensitätsparameters zweifelhaft. Lässt man z.B. zu, dass sich der Intensitätsparameter einmal pro Jahr deterministisch ändert, so ergibt sich eine Überlebenswahrscheinlichkeit für  $t$  Jahre von  $e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_t)}$ , wobei  $\lambda_i$  den Intensitätsparameter für das  $i$ -te Jahr bezeichnet. Dieses Konzept des sich jährlich deterministisch ändernden Intensitätsparameters lässt sich weiter auf den Fall eines sich ständig deterministisch ändernden Parameters erweitern. Bezeichnet man den Intensitätsparameter im Zeitpunkt  $s$  mit  $\lambda_s$ , so ergibt sich eine

Überlebenswahrscheinlichkeit für  $t$  Jahre von  $\exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)$ . Bei fortschreitender

Zeit stehen einem nun aber in der Regel immer mehr Informationen über die Qualität des Schuldners zur Verfügung. Diese Informationen können von unterschiedlichsten Quellen stammen und werden üblicherweise zufällig eingehen. Deshalb ist es naheliegend, den Intensitätsparameter schließlich als stochastischen Prozess zu modellieren. Unter einigen technischen Voraussetzungen kann man dann zeigen, dass sich die Überlebenswahrscheinlichkeit  $p^s$  im Zeitpunkt  $t$  unter Berücksichtigung aller zu diesem Zeitpunkt vorliegenden Informationen für ein Überleben bis zum Zeitpunkt  $s$  als  $E_t\left[\exp\left(-\int_t^s \lambda(u) du\right)\right]$  berechnen lässt, wobei  $E_t$  den Erwartungswert, gegeben alle bis zum Zeitpunkt  $t$  verfügbaren Informationen, und  $\{\lambda(s)\}_{s \geq 0}$  den stochastischen Intensitätsprozess bezeichnen.

#### Beispiel:

Zur Modellierung von  $\lambda$  soll ein Cox/Ingersoll/Ross (CIR) Prozeß verwendet werden. Dazu nimmt man an, dass  $\lambda$  der stochastischen Differentialgleichung

$$d\lambda(t) = \kappa_\lambda (\theta_\lambda - \lambda(t)) dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda(t)} dW(t) \quad (3.7)$$

genügt, wobei  $W$  eine standardisierte Brownsche Bewegung bezeichnet. Die Parameter können folgendermaßen interpretiert werden:

- $\theta_\lambda > 0$  ist das langfristige Mittel von  $\lambda$ , d.h.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(\lambda(t)) = \theta_\lambda$ .

- $\kappa_\lambda > 0$  ist die „durchschnittliche Rate“, mit der  $\lambda$  gegen das langfristige Mittel strebt.
- $\sigma_\lambda > 0$  ist der Volatilitätskoeffizient.

Die Überlebens- und Ausfallwahrscheinlichkeiten können dann unter Verwendung der üblichen CIR Methodik (siehe etwa Bingham und Kiesel (1998), Kapitel 8) bestimmt werden.

Das folgende Schaubild veranschaulicht den Einfluss des Volatilitätsparameters auf die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $1 - p^s(0, T)$ :

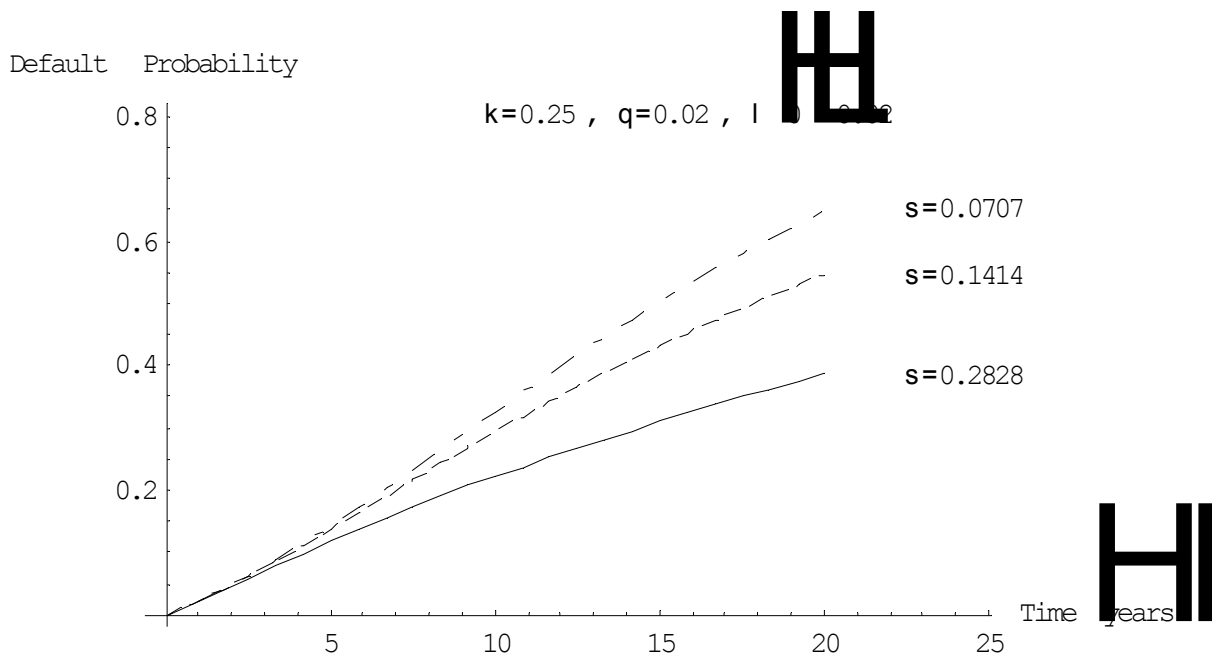


Abbildung 2: Einfluss von  $\sigma$  auf die Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Die Schätzung der Parameter in einem intensitätsbasierenden Modell kann entweder durch Anpassung an historische Ausfallraten oder -- sofern Marktdaten verfügbar sind -- implizit durch Schätzung aus aktuellen Bond-Spreads erfolgen. Die Verfahren werden z.B. bei Schmid und Zagst (1999) diskutiert und an Beispielen durchgeführt.

Bei der Schätzung aus historischen Ausfallraten besteht das Problem, dass aktuelle Informationen und Trends nicht berücksichtigt werden. Da aber gerade aktuelle makroökonomische Entwicklungen einen starken Einfluß auf die Ausfallwahrscheinlichkeiten haben, nimmt man damit einen Informationsverlust und eventuell unscharfe Parameterschätzungen in Kauf. Theoretisch würde man so vorgehen, dass man in Abhängigkeit von der zu schätzenden Anzahl von Parametern empirische Ausfallraten für unterschiedliche Zeitperioden den theoretischen von den Parametern abhängigen Ausfallwahrscheinlichkeiten gegenüberstellen und durch Anwendung eines Optimierungsverfahrens, diejenigen

Parameterwerte bestimmen würde, die die Summe der Abweichungsquadrate minimieren.

Bei der Schätzung der Parameter mit Hilfe von Bond-Preisen muss man beachten, dass man aus ihnen zunächst nur Ausfallwahrscheinlichkeiten unter dem transformierten Wahrscheinlichkeitsmaß gewinnt, was die Bewertungsformel

$$X(t, T) = p(t, T) \left( 1 + (1 - R) Q_t(\tau \leq T) \right)$$

aus Abschnitt 2 verdeutlicht. An Bond-Preise kann man somit zunächst auch nur Intensitätsprozesse unter dem transformierten Wahrscheinlichkeitsmaß anpassen. Zur Schätzung der Parameter unter dem tatsächlichen Maß muss man zusätzlich einen Risikoparameter (den market price of risk) schätzen und damit den Maßwechsel durchführen. Um die Parameter zu schätzen, stellt man Marktpreise den theoretischen Preisen gemäß obiger Formel gegenüber. Über  $Q_t(\tau \leq T)$  hängt diese Formel von sämtlichen Parametern des Intensitätsprozesses ab. Neben der Methode der Minimierung der kleinsten Abweichungsquadrate werden dazu in der Praxis vor allem die verallgemeinerte Momentenmethode, die Kalman Filter Methodik und die Maximum Likelihood Methode angewandt. Ein häufig auftretendes Problem ist allerdings, dass nicht genügend Marktdaten zur Verfügung stehen, um sinnvoll Schätzungen durchzuführen, und auch selbst bei ausreichender Datengrundlage zeigt es sich, dass die Schätzungen oft nicht stabil sind.

Die von Credit Suisse Financial Products (CSFP) entwickelte CreditRisk+ Methodik beruht auf dem intensitätsbasierenden Ansatz. CreditRisk+ ist an den in der Versicherungswirtschaft benutzten Methoden zur Risikoanalyse von Schadensportfolios angelehnt und erlaubt es, viele in der Versicherungsmathematik schon lange bekannte Techniken zu verwenden.

### 3.3. Der empirisch-ökonomische Ansatz

Der empirische Ansatz wird weitgehend von Ratingagenturen verfolgt, die über historische Datenbanken von Kreditereignissen verfügen. Ratingagenturen sind darauf spezialisiert, die Kreditwürdigkeit von Schuldern einzustufen und Gläubiger über die Wahrscheinlichkeit zu informieren, mit denen Schuldner ihren Zinszahlungen und sonstigen Verbindlichkeiten nachkommen oder auch nicht nachkommen können. Die vier größten US Ratingagenturen sind Moody's Investors Service, Standard & Poor's, Fitch IBCA und Duff and Phelps. Die zunehmende Bedeutung solcher Agenturen zeigt sich zum einen in ihrer ständig steigenden Zahl und zum anderen in der stark zunehmenden Anzahl der durch sie ausgegebenen Ratings. So nahm die Zahl der durch Moody's beurteilten Schuldner von 1960 bis 1997 von 912 auf 3841 zu. In regelmäßigen Zeitabständen werden die Ratings überprüft und gegebenenfalls angepasst. Hat eine wichtige das Rating beeinflussende Entwicklung eingesetzt, so setzt Standard & Poor's den Schuldner auf die sogenannte Credit Watch List, Moody's auf die sogenannte Rating Review List. Auch in Deutschland sind mittlerweile bankunabhängige Agenturen im Aufbau, die insbesondere auch Ratings für den Mittelstand liefern sollen. Der Wunsch nach einer großen europäischen Ratingagentur wurde besonders nach der Asienkrise laut, bei der den amerikanischen Häusern Versagen vorgeworfen worden war. Dazu kamen Zweifel an der Unabhängigkeit und Seriosität der Institute, die damit begründet worden waren, dass die Agenturen als Folge der Asienkrise zwar einige deutsche Banken aber überhaupt keine amerikanische Bank herabgestuft hatten.

Bei der Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeiten greifen die Ratingagenturen auf ihre historischen Datenbanken zurück, in denen sie sämtliche Ausfälle der letzten Jahrzehnte dokumentiert haben. In jedem Jahr besteht das für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten zu Grunde liegende Firmenuniversum aus allen Firmen des Vorjahres, die nicht ausgefallen sind, und allen Firmen, die in diesem Jahr zum ersten Mal ein Rating erhalten. Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten ergeben sich dann als der Quotient aus allen in dem Jahr ausgefallenen Firmen und der Anzahl aller Firmen im Universum. Aus den jährlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten lassen sich kumulative Ausfallwahrscheinlichkeiten für größere Zeiträume ableiten. Analog wird bei der Bestimmung von Übergangswahrscheinlichkeiten vorgegangen.

Einer der Hauptkritikpunkte am Verfahren der Ratingagenturen ist deren Annahme, dass sich durchschnittliche Ausfall- und Übergangswahrscheinlichkeiten direkt aus historischen Beobachtungen ableiten und für Ausfall- und Ratingänderungsprognosen verwenden lassen. Dieser statische Ansatz steht deutlich im Widerspruch dazu, dass sich diese Wahrscheinlichkeiten sehr dynamisch über die Zeit verändern und stark vom Konjunkturzyklus abhängen.

Diesen Kritikpunkten wird durch ökonometrischen Ausfallmodellen begegnet in denen die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_t^d$  in der aktuellen Periode  $t$  in Abhängigkeit eines Vektors  $x_t$  von exogenen Variablen erklärt wird. Definiert man die Zufallsvariable  $D_t$  als 1, falls der Schuldner in Periode  $t$  ausfällt, und als 0, falls er nicht ausfällt, so erfolgt die Modellierung gemäß  $p_t^d = P(D_t = 1 | x_t)$ . Standardmodelle für diesen Ansatz sind die Probit und die Logit Modelle.

### Beispiele:

a) Das Probit Modell:  $p_t^d = N(\beta' x_t)$ , wobei  $N$  die kumulative Standardnormalverteilung und  $\beta$  den Vektor der Gewichte der einzelnen exogenen Variablen bezeichnet.  $\beta$  wird üblicherweise aus historischen Datenreihen geschätzt.

b) Das Logit Modell:  $p_t^d = \frac{e^{\beta' x_t}}{1 + e^{\beta' x_t}}$ .

Dem Probit Modell liegt die Normal-, dem Logit Modell die logistische Verteilung zugrunde, die sich durch „heavier tails“ auszeichnet.

Das wohl bekannteste Modell dieser Klasse wurde vom Thomas Wilson in einer Serie von Arbeiten (Wilson (1997a) und Wilson (1997b)) vorgestellt. Weiterentwickelte Varianten sind die Grundlage des von McKinsey propagierten Kreditrisikomodelles CreditPortfolioView. Hierbei wird die Ausfallwahrscheinlichkeit in jeder Periode bedingt nach einem Index  $Y_{i,t}$  aus makroökonomischer Faktoren  $X_{j,t}$  (wie z.B. Wirtschaftswachstum, Arbeitslosigkeit, Zinsniveau, ..) hergeleitet. Jeder dieser Faktoren wird als Zeitreihe, typischerweise als ein autokorrelierter Prozess der Ordnung 2, mit normalverteilten Innovationen modelliert.

$$X_{j,t} = k_{i,0} + k_{j,1} X_{j,t-1} + k_{j,2} X_{j,t-2} + \varepsilon_{j,t} \quad (3.8)$$

Der Index ergibt sich dann als gewichtete Summe der Faktoren.

$$Y_{i,t} = \beta_{i,0} + \sum \beta_{i,j} X_{i,t} + v_{i,t} , \quad (3.9)$$

wobei die Fehlerterme wieder als normalverteilt angenommen werden. Schliesslich wird der Index mittels der Logit Funktion in eine Ausfallwahrscheinlichkeit transformiert:

$$p_{i,t} = \frac{1}{1 + \exp(-Y_{i,t})} . \quad (3.10)$$

Da die zufälligen Komponenten der Faktoren in einer normalverteilten Variable zusammengefasst werden können, ergibt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit als Logittransformierte einer standardnormalverteilten Zufallsvariable.

Zur Kalibrierung müssen alle Parameter aus dem System von Gleichungen (3.8) – (3.10) geschätzt werden, was einen relativ hohen Datenbedarf nach sich zieht. Neben den Daten zu Firmenausfällen, müssen auch die für die relevanten makroökonomischen Faktoren ausreichend lange Historien zur Verfügung stehen. Die Wahl der logistischen Regression wird von Wilson (Wilson (1997a) und Wilson (1997b)) mit der Tatsache begründet, dass der Wert der Response Variable (Ausfallwahrscheinlichkeit) zwischen Null und Eins liegt, und, in verschiedenen Teststudien der Wert des Bestimmtheitsmasses  $R^2$  zufriedenstellend war. In dieser Allgemeinheit sind beide Argumente bedenklich: Ausfallwahrscheinlichkeiten sind typischerweise relativ klein und damit robust gegenüber moderaten Veränderungen des Indexes. Weiterhin ist  $R^2$  als unzureichendes Qualitätskriterium für Modellperformance in der logistischen Regression hinreichend dokumentiert. Die Konstruktion impliziert daher, dass das Modell für Subinvestment-Grade Firmen (höchste Sensitivität gegenüber Kreditzyklus und größte Ausfallwahrscheinlichkeiten) am besten geeignet ist.

### 3.4. Vergleich der Ansätze

Eine vergleichende Analyse der Ausfallwahrscheinlichkeiten einzelner Schuldner durch die Modelle kann sinnvollerweise nur zwischen empirischer und optionspreistheoretischer Modellierung erfolgen. (Der intensitätsbasierende Ansatz betrachtet nur Ausfallhäufigkeiten in Portfolios und nicht individuelle Ausfallhäufigkeiten).

Wir wollen zunächst die beiden Ansätze an einem Beispiel veranschaulichen. Wir bestimmen dazu die Einjahres-Ausfallwahrscheinlichkeiten für die Metallgesellschaft für einen Zeitraum von November 1990 bis Oktober 1999. Diesem Ergebnis werden die von Moody's angegebenen Wahrscheinlichkeiten gegenübergestellt.

Datengrundlage sind die Marktkapitalisierungen der Metallgesellschaft aus Datastream, die kurz- und langfristigen Verbindlichkeiten aus Reuters, Zinssätze (Libor) und historische Ratingänderungen aus Bloomberg.

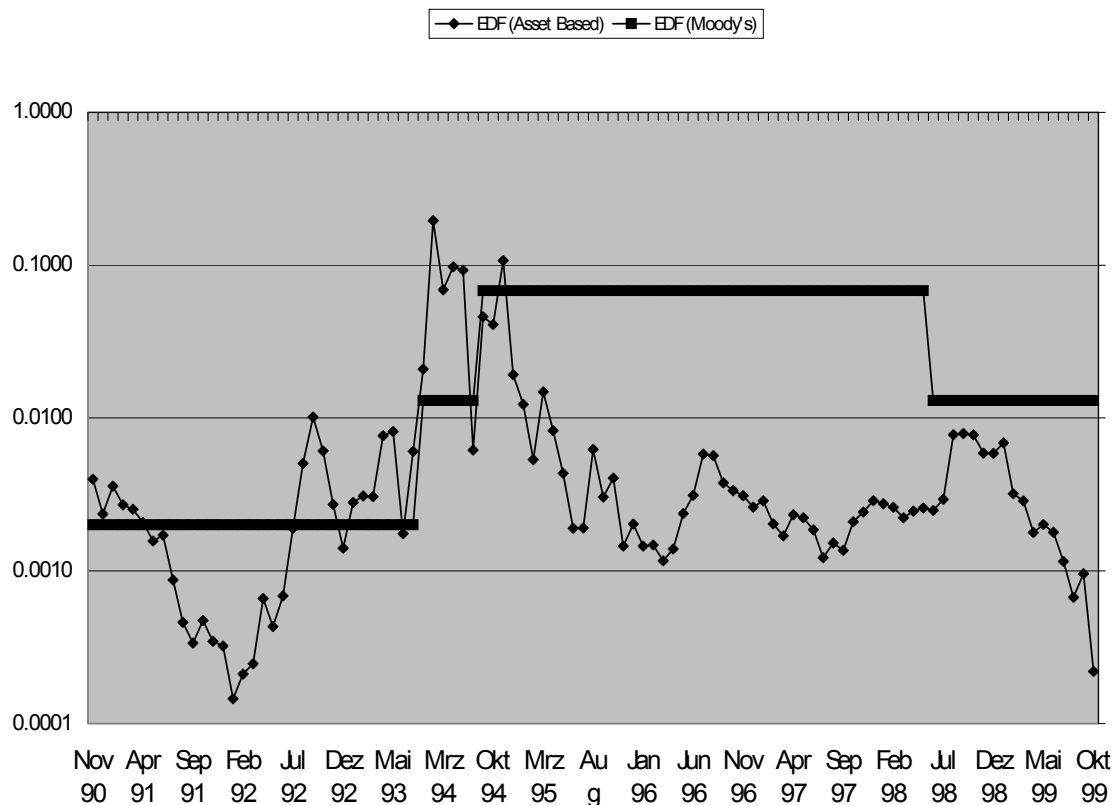


Abbildung 3: EDFs und Ausfallwahrscheinlichkeiten von Moody's für die Metallgesellschaft.

Abbildung 3 verdeutlicht zwei interessante Effekte:

- Die EDFs reagieren schneller auf eine Verschlechterung der Bonität der Metallgesellschaft. Während bei Moody's erst im Januar 1994 ein Downgrade erfolgt, steigen die EDFs bereits seit Mitte 1992 stark an. Auch der zweite Downgrade wird von den EDFs vorweggenommen. Er erfolgt bereits im März 1994, bei Moody's erst im September 1994.
- Moody's ist konservativer bei der Wiedereinstufung der Metallgesellschaft in eine bessere Rating-Klasse. Der Markt „vergisst schneller“ als die Ratingagentur und zeigt bereits ab Anfang 1995 wieder eine deutlich bessere Bonität an.

Zur Bestimmung der EDFs haben wir den von KMV vorgeschlagenen Ansatz verwendet.

KMV untersuchte in verschiedenen Studien das historische Ausfallverhalten einer sehr großen Anzahl von Firmen und leitet daraus eine funktionale Beziehung zwischen risikoneutralen Distance to Default  $d_2$  und den EDFs her. Dazu werden die berechneten risikoneutralen Distances to Default mit tatsächlich beobachteten Ausfallraten für entsprechende Firmengruppen verglichen. An diese Daten wird dann eine glatte Kurve angepasst. Untersuchungen von KMV belegen, dass zwischen einem und zwei Jahren vor einem Konkurs ein signifikanter Anstieg der EDFs zu beobachten ist, wodurch die Vorhersagefähigkeit der EDFs belegt wird.

Solche Studien belegen zwar die Vorhersagefähigkeit des KMV Ansatzes ( verschiedene Studien ,etwa Kaplan und Urwitz (1979), belegen die Vorhersagefähigkeit von Ratings ) sagen aber wenig über den das absolute Risiko, und damit den Wert der Ausfallwahrscheinlichkeit aus. Weiter Studien, etwa Kealhofer, Kwok. und Wenlong (1998) oder Miller (1998), untersuchen die Verteilung der EDFs innerhalb von Bonitätsklassen von Ratingagenturen. Sie finden, dass sich die EDFs der Firmen, die einer bestimmten Ratingklasse zugeordnet wurden in der Regel um den Median der Ausfallwahrscheinlichkeit häufen, und dass es hohe Variationen der Ausfallwahrscheinlichkeiten innerhalb der Ratingklassen gibt. Typischerweise bewirkt diese Struktur, dass die durchschnittliche Ausfallwahrscheinlichkeit der Ratingklasse signifikant höher als die Ausfallwahrscheinlichkeit der typischen Firma in der Klasse ist, d.h. die Ausfallwahrscheinlichkeit die Firmen einer Ratingklasse zugeordnet wird ist zu konservativ.

Für eine vergleichende Wertung reichen obige Ergebnisse allerdings nicht aus. Auf zufriedenstellenden statistischen Signifikanzniveau kann nur festgestellt werden, dass EDFs innerhalb von Ratingklassen nicht gleichverteilt sind. Ein möglicher Ansatz aussagekräftigere Vergleiche durchzuführen, wäre die Konsistenz von Ratings bzw. EDFs mit beobachtbaren Marktpreisen der gehandelten Wertpapiere von Firmen zu vergleichen. Erste Resultate für Ratingklassen (Perraudin und Taylor (1999)) zeigen, dass im Durchschnitt 25% der Bondpreise inkonsistent mit der Ratingklasse der entsprechenden Firma sind. (Allerdings leidet die Aussagekraft solcher Studien unter der geringen Qualität der vorhandenen Daten).

## 4. Portfolio-Betrachtungen

### 4.1 Erwarteter und unerwarteter Verlust im Portfoliokontext

Der erwartete Verlust in einem Portfolio  $EL_p$  mit n kreditrisikobehafteten Wertpapieren (die wir mit  $i=1, \dots, n$  indizieren) ist durch

$$EL_p = \sum_i EL_i = \sum_i (X_i \times LGD_i \times EDF_i) \quad (4.1)$$

gegeben, wobei die mit  $i$  indizierten Größen jeweils die individuellen Beiträge des  $i$ -ten Wertpapiers bezeichnen. Da der erwartete Verlust als Erwartungswert eine lineare Größe ist, ergibt sich in diesem Fall eine einfache additive Beziehung.

Im Gegensatz dazu ist der unerwartete Verlust  $UL_p$  in einem Portfolio, der als Standardabweichung des Wertprozesses definiert ist, eine nicht lineare Größe:

$$UL_p = \left[ \sum_{i,j} \rho_{ij} UL_i UL_j \right]^{1/2}, \quad (4.2)$$

wobei die individuellen unerwarteten Verluste durch (vergleiche (2.8))

$$UL_i = X_i \times \sqrt{EDF_i \times \sigma_{LGD(i)}^2 + LGD_i \times \sigma_{EDF(i)}^2}$$

gegeben und die  $\rho_{ij}$  die Ausfallkorrelationen des  $i$ -ten und  $j$ -ten Wertpapiers bezeichnen. Mittels Formel (4.2) kann man zeigen, dass der unerwartete Verlust des



Portfolios geringer als die Summe der unerwarteten Verluste der einzelnen Wertpapiere ist (der mathematische Hintergrund dieser Tatsache ist die sogenannte Minkowskische Ungleichung). Damit haben wir (wie aus der Standard-Portfoliotheorie zu erwarten war) einen Diversifikationseffekt bezüglich des Risikomaßes unerwarteter Verlust  $UL$  erhalten. Eine Umformung der Formel (4.2) erlaubt es, den unerwarteten Verlust eines Portfolios als Summe der Risikobeiträge  $RC_i$  der einzelnen Wertpapiere ( $i=1, \dots, n$ ) aufzufassen. Dabei verstehen wir unter dem Risikobeitrag eines Wertpapiers das zusätzliche Risikoinkrement, das ein einzelnes Wertpapier zum Gesamtportfoliorisiko beiträgt:

$$UL_p = \frac{\sum_i UL_i \sum_j \rho_{ij} UL_j}{UL_p} = \sum_i UL_i \frac{\partial UL_p}{\partial UL_i} = \sum_i RC_i .$$

Unglücklicherweise ist es im Falle eines kreditrisikobehafteten Portfolios -- im Gegensatz zu einem Portfolio liquider Wertpapiere wie Aktien -- oft nicht möglich, eine aktive Portfoliooptimierung zu betreiben. Eine regional gebundene Bank ist aufgrund des Fehlens eines liquiden Marktes nicht immer in der Lage, ihr Kreditportfolio im Sinne optimaler Gewichtung umzustrukturieren.

In der Praxis werden EL und UL oft als Prozentpunkte des (risikobehafteten) Exposures angegeben. In diesem Fall können Portfolio EL und UL als gewichtete Summen aufgefasst werden und obige Überlegungen entsprechend übertragen werden.

## 4.2 Korrelationen

Unsere Analyse der Risikokenngröße unerwarteter Verlust hat gezeigt, dass die Korrelation der Ausfallwahrscheinlichkeit einen direkten Einfluss auf den unerwarteten Verlust eines Portfolios hat. Darüber hinaus beeinflussen die Korrelationen direkt die Risikobeiträge der einzelnen Wertpapiere zum Portfoliorisiko. Damit spielen Korrelationen bei Konzentrations- und Diversifikationseffekten die entscheidende Rolle. Unglücklicherweise ist eine statistische Schätzung von Korrelationen der Ausfallwahrscheinlichkeiten noch datenintensiver als die Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit selbst.

Deshalb versucht man Ausfallkorrelationen direkt über Ausfallwahrscheinlichkeiten zu gewinnen. Betrachtet man das Problem, die Ausfallkorrelation zweier Schuldner A und B zu bestimmen, und bezeichnet man die jeweiligen Ausfallereignisse mit  $D_A$  bzw.  $D_B$ , so ist die Korrelation der beiden Ausfallereignisse mathematisch definiert als

$$\rho_{A,B} = \frac{P(D_A D_B) - P(D_A)P(D_B)}{\sqrt{P(D_A)(1 - P(D_A))} \sqrt{P(D_B)(1 - P(D_B))}} . \quad (4.3)$$

Da die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $P(D_A)$  und  $P(D_B)$  aus den Modellen der letzten Sektion bekannt sind, bleibt nur das Problem, die Wahrscheinlichkeit eines gleichzeitigen Ausfalls von A und B zu bestimmen. Äquivalent dazu ist die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der beiden Schuldner ausfällt, was aus der Formel  $P(D_A D_B) = P(D_A) + P(D_B) - P(D_A + D_B)$  folgt.

Ein wichtiges Ergebnis des strukturellen (Merton) Ansatzes war, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Schuldners durch die Wahrscheinlichkeit einer normalverteilten Zufallsvariable, unter eine gewisse Schranke zu fallen, gegeben war. Daher liegt es nahe, die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit mittels einer bivariaten Normalverteilung zu bestimmen. Da die Ausfallwahrscheinlichkeiten über die Volatilitäten der Wertprozesse der Unternehmen berechnet wurden, bestimmt man den für die Kovarianzmatrix der bivariaten Normalverteilung noch notwendigen Korrelationsparameter über die Korrelation der Wertprozesse. Da die Wertprozesse in der Regel nicht beobachtbar sind, approximiert man diese Korrelation durch die Korrelation der Aktienkurse. Typischerweise liefert dieser Ansatz Ausfallkorrelationen, die eine Größenordnung kleiner als Aktienkorrelationen ausfallen. Korrelationen der Wertprozesse liegen in der Regel zwischen 0.1 und 0.6, Ausfallkorrelationen zwischen 0.002 und 0.15.

Als Beispiel berechnen wir die Ausfallkorrelation von Air Canada und Delta Airlines. Im Juli 1999 betrug die EDF von Air Canada (Schuldner A)  $P(D_A) = 2\%$ , die von Delta Airlines (Schuldner B)  $P(D_B) = 0.5\%$ . Die aus historischen Daten ermittelte Korrelation der Wertprozessrenditen lag bei  $\rho = 0.43$ . Bei Unterstellung einer

bivariaten Normalverteilung mit Kovarianzmatrix  $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \rho\sigma_A\sigma_B \\ \rho\sigma_A\sigma_B & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$  ergibt sich

dann die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit beider Airlines aus

$$P(D_A D_B) = \int_{-\infty}^{\text{Default Point A}} \int_{-\infty}^{\text{Default Point B}} f(V_A, V_B; \Sigma) dV_A dV_B, \text{ wobei } f(V_A, V_B; \Sigma) \text{ die gemeinsame Dichte}$$

der bivariat normalverteilten Wertprozessrenditen darstellt. Mit den Werten für Air Canada und Delta Airlines ergibt sich dann  $P(D_A D_B) = 0.0935\%$  und  $\rho_{AB} = 0.0846$ .

Die Wahl der Normalverteilung als "Verteilung" der Ausfallwahrscheinlichkeiten ist zwar eine Standardannahme in der Praxis, eine analytische Begründung gibt es dafür allerdings nicht. Eine analytische Formel für Ausfallkorrelationen wurde unter den Annahmen des strukturellen Modells von Zhou (1997) bestimmt. Ein gewisses Maß an Rechtfertigung ist allerdings die Tatsache, dass qualitative Eigenschaften der so erhaltenen Korrelationen mit den wenigen empirischen Studien übereinstimmen.

Um die Korrelationsstruktur eines Portfolios zu ermitteln, müsste man die Korrelationen zwischen allen Wertpapieren schätzen. Da sich schon bei einer Anzahl von 100 Wertpapieren 4950 verschiedene Korrelationen ergeben, ist dies praktisch nicht möglich. Deshalb geht man zu Faktormodellen über, d.h. man erklärt die Aktienrenditen der zu berücksichtigenden Unternehmen durch Faktoren, wie z.B. den Renditen des zugehörigen Industrieindex. Damit wird die Anzahl der zu ermittelnden Korrelationen drastisch verringert.

Im folgenden Beispiel wird die Korrelation  $\rho$  der Aktienrenditen  $r_1$  und  $r_2$  zweier Firmen mit Hilfe von Indexrenditen  $r_{I1}$  und  $r_{I2}$  erklärt:

$$r_k = \beta_{1k} r_{I1} + \beta_{2k} r_{I2} + \varepsilon_k,$$

wobei die  $\beta$ -Faktoren angeben, wie stark die verschiedenen Indexrenditen die Firmenrenditen erklären, und die  $\varepsilon_k$  als standardnormalverteilte Faktoren angenommen werden, die mit den Indexrenditen unkorreliert sind. Mit Hilfe von

$$\text{Var}(r_k) = \sigma_k^2 = 1 + \beta_{1k}^2 \text{Var}(r_{11}) + \beta_{2k}^2 \text{Var}(r_{12}) + 2\beta_{1k}\beta_{2k} \text{Cov}(r_{11}, r_{12})$$

und

$$\text{Cov}(r_1, r_2) = \sigma_{12} = \beta_{11}\beta_{12} \text{Var}(r_{11}) + \beta_{21}\beta_{22} \text{Var}(r_{12}) + (\beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21}) \text{Cov}(r_{11}, r_{12})$$

definiert man einen Schätzer für  $\rho$  durch

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Sind nun die Korrelation der Indexrenditen durch 0.3, die Standardabweichung der Renditen von Index 1 durch 0.9 und von Index 2 durch 0.6 gegeben, so ergeben sich mit  $\beta_{11} = 0.5$ ,  $\beta_{12} = 0.8$ ,  $\beta_{21} = 0.1$  und  $\beta_{22} = 0.7$  die Werte  $\sigma_1 = 1.098$ ,  $\sigma_2 = 1.370$ ,  $\sigma_{12} = 0.419$  und damit  $\rho = 0.278$ .

Es bleibt zu beachten, dass die Korrelation ein (lineares) Maß zur Einschätzung des Zusammenhanges zweier Zufallsereignisse ist. Nicht lineare Abhängigkeiten, z.B. Abhängigkeiten in der Volatilitätsstruktur der Ausfallereignisse, werden damit nicht erfasst.

### 4.3. Portfolio-Verlust-Verteilungen

Hat man individuelle Ausfallwahrscheinlichkeiten (oder Ausfallwahrscheinlichkeiten von Klassen homogener Risiken) und die entsprechenden Korrelationen bestimmt, kann mittels Formel (4.2) der unerwartete Verlust UL als Risikomaß für ein Portfolio bestimmt werden.

Als Alternative zum unerwarteten Verlust eines Portfolios (der Standardabweichung der Portfolioverteilung) werden häufig auf Quantilen (Schranken, die die Verlustverteilung mit gewissen Wahrscheinlichkeiten, wie z.B. 1%, unterschreitet) beruhende Risikomaße, wie der Value at Risk (VaR) oder "expected shortfall" - der erwartete Verlust, gegeben der Verlust übertrifft eine gewisse Schranke - betrachtet.

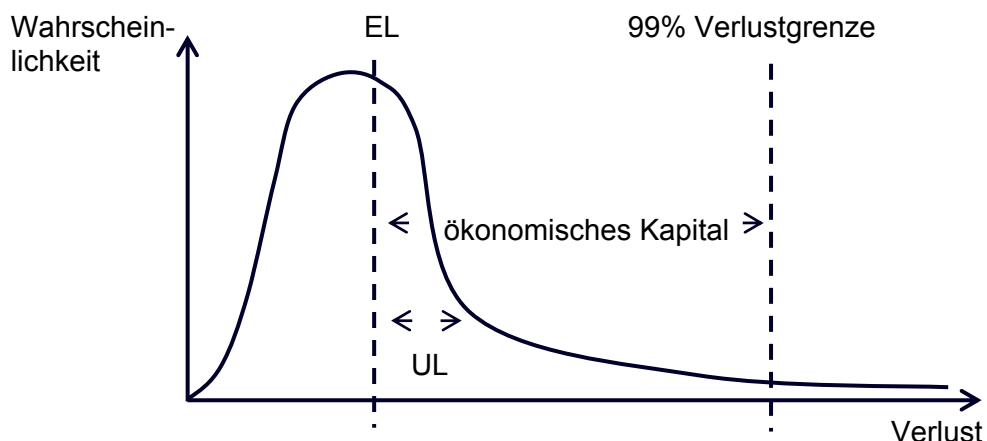


Abbildung 4: Risikomaße einer Verlustverteilung

Unglücklicherweise können diese Risikomaße nicht direkt aus den entsprechenden Werten der Einzelrisiken hergeleitet werden; es ist notwendig, die gesamte Verlustverteilung zu erzeugen. Typischerweise geschieht dies durch Monte Carlo Simulation, d.h. nachdem die Verteilungen der Einzelrisiken festgelegt wurden, werden Realisationen von Zufallsvariablen mit diesen Verteilungen erzeugt und die Werte zu einer Realisation des Portfoliowertes aggregiert. Wird dieser Vorgang hinreichend oft, typischerweise bis zu 50000 Mal, wiederholt, entsteht eine simulierte Verteilung der Portfoliowerte, die die wahre Verteilung hinreichend genau approximiert.

Das folgende Schaubild zeigt eine typische simulierte Verlustverteilung eines Portfolios bestehend aus 25 Schuldnern unterschiedlicher Bonität mit einem Gesamt-Exposure von 130 513 072.

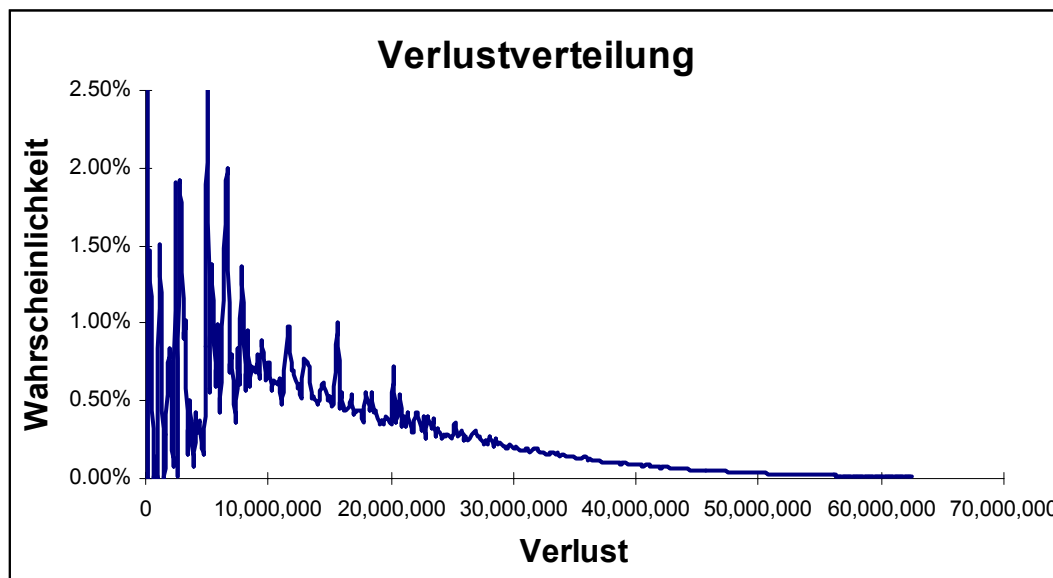


Abbildung 5: Beispiel einer durch Monte Carlo Simulation generierten Verlustverteilung.

Auf den ersten Blick erscheint es überraschend, dass mit den verschiedenen Modellierungsideen für Ausfallwahrscheinlichkeiten erzeugte Portfolioverteilungen so ähnlich erscheinen. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Modellierungsansätze einem gemeinsamen Konzept genügen.

Dazu untersuchen wir, wie Fluktuationen der Ausfallwahrscheinlichkeiten in den verschiedenen Ansätzen realisiert werden. Im strukturellen (Merton) Ansatz ist der zu Grunde liegende zufällige Prozess, der den Firmenwert modelliert, eine von einer Brownschen Bewegung getriebene stochastische Differentialgleichung (3.3), im intensitätsbasierenden Ansatz wird die stochastische Ausfallintensität durch eine von einer Brownschen Bewegung getriebene stochastische Differentialgleichung (3.7) modelliert, und schließlich im ökonometrischen Ansatz wird ein Index über normalverteilte Faktorprozesse erzeugt ((3.8) und (3.9)). Da Brownsche Bewegungen das zeitstetige Äquivalent normalverteilter Zufallsvariablen sind, werden in allen Modellen zufällige Schwankungen mittels normalverteilter Zufallsvariablen erzeugt. Nun können wir uns die Firmenwerte bzw. die Ausfallintensitäten einer Klasse von Firmen sowohl von firmenspezifischen Faktoren als auch weiteren systemischen (oder makroökonomischen) Faktoren abhängig vorstellen. Nehmen wir diese Faktoren als normalverteilt an, bleibt die Modellierung

(da Summen normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind) konsistent. Damit lassen sich alle Ansätze in einen gemeinsamen Rahmen einordnen: die zu Grunde liegenden zufälligen Fluktuationen werden von normalverteilten Faktoren bestimmt. Während im strukturellen und ökonometrischen Modell Ausfallwahrscheinlichkeiten direkt über eine Funktion dieser Faktoren bestimmt werden, ist die Ausfallwahrscheinlichkeit im intensitätsbasierenden Modell eine Funktion der Intensität, die eine Funktion der Faktoren ist. Die modellspezifischen Funktionen sind

- im strukturellen Modell:

$$p |_f = \Phi \left( \frac{c - \sqrt{\rho} f}{\sqrt{1 - \rho}} \right),$$

wobei  $f$  die Summe der normalverteilten Faktoren und  $\rho$  die Korrelation des Firmenwertes mit den Faktoren ist;

- im ökonometrischen Modell:

$$p |_f = \frac{1}{\exp(b_0 + b_1 f)},$$

wobei  $f$  wieder die Summe der normalverteilten Faktoren ist, die Koeffizienten  $b_0, b_1$  aus den Koeffizienten der Darstellungen (3.8) und (3.9) bestimmt werden,

- im intensitätsbasierenden Modell:

$$p |_f = 1 - a \times \exp(-b \chi^2(f)),$$

wobei nun  $\chi^2(f)$  eine von der Summe der Faktoren  $f$  abhängige  $\chi^2$ -verteilte Zufallsvariable ist, und  $a, b$  Koeffizienten sind. (Diese Koeffizienten lassen sich analog zu den Koeffizienten der Bondpreisformel im Cox-Ingersoll-Rox Zinsmodell herleiten, vgl. etwa Bingham und Kiesel, Kapitel 8). In der Praxis (z.B. CreditRisk+) wird für die Verteilung der Intensität häufig eine analytisch einfacher zu handhabende Gammaverteilung  $\Gamma(\alpha, \beta)$  angenommen (eine  $\chi^2$ -verteilte Zufallsvariable lässt sich ebenfalls als Gamma-verteilt auffassen).

In obigen Darstellungen wurde der Wert der Faktoren jeweils als konstant angenommen, d.h., die Ausfallwahrscheinlichkeiten wurden bedingt nach dem jeweiligen Zustand der Ökonomie (ausgedrückt durch feste Faktorwerte) ermittelt. Die unbedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten werden dann über die Betrachtung aller möglichen Zustände der Welt gewonnen. Betrachtet man ein homogenes Subportfolio, wird dazu im strukturellen und ökonometrischen Modell typischerweise eine Binomialverteilung  $B(k, n, p)$  der Ausfälle angenommen (d.h. die Wahrscheinlichkeit von genau  $k$  Ausfällen in einem Portfolio von  $n$  Risiken mit individueller Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  ergibt sich als  $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ). Im intensitätsbasierenden Modell wurde bei der Modellierung von Beginn an ein homogenes Subportfolio mit einem poissonverteilten Ausfallprozess  $P(k, \lambda)$  angenommen.

Mathematisch gesehen wird nun eine Faltungsoperation durchgeführt, um die unbedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten zu ermitteln.

Für das strukturelle und das ökonometrische Modell ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(k, n, p | f) \varphi(f) df ,$$

wobei  $\varphi$  die Dichtefunktion der Normalverteilung bezeichnet. Für das intensitätsbasierende Modell mit Gammaverteilter Intensität ergibt sich die unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit als

$$\int_0^{\infty} P(k, \lambda) \Gamma(\lambda; \alpha, \beta) d\lambda .$$

Diese Integrale können leicht ausgewertet werden. Aus der Faltung der Poisson- und Gammaverteilung ergibt sich die wohlbekannte negative Binomialverteilung.

Damit ist die Behandlung von homogenen Subportfolios in allen drei Modellansätzen strukturell gleich. Unterschiede ergeben sich nur durch die unterschiedliche Behandlung der Ausfallkorrelationen im jeweiligen Modell. Im Merton Modell werden Ausfallkorrelationen im Einklang mit der Modellstruktur über Aktienkorrelationen (bzw. Aktienindexkorrelationen) gewonnen. Das ökonometrische Modell kann in natürlicherweise auf die zu Grunde liegende makroökonomische Faktorstruktur zurückgreifen. Einzig das intensitätsbasierende Modell steuert die Ausfallkorrelation über die Volatilität der Ausfallintensität.

Trotz der Unterschiede in der Korrelationsmodellierung kann man zeigen, daß nach einer Angleichung der verschiedenen Parameter, derart dass Ausfallrate und Volatilität der Ausfallrate in den Modellen übereinstimmen, die von den Modellen gelieferten Kenngrößen keine signifikanten Unterschiede zeigen (vgl z.B. die Studie von Koyuoglu und Hickman (1998)).

Somit ergeben sich bei der praktischen Anwendung der Modelle nur Unterschiede durch inkonsistente Parametereinstellungen, was sich bei den unterschiedlichen Datenanforderungen in der Modellkalibrierung durchaus erklären läßt.

## 5. Schlussbemerkungen

In unserer Studie haben wir die unterschiedlichen Ansätze zur Modellierung der für die Kreditportfoliorisikomessung dominierenden Ausfallwahrscheinlichkeiten diskutiert. Wir haben gezeigt, dass die praktischen Konstruktionen der Ausfallwahrscheinlichkeiten in den verschiedenen kommerziellen Modellen wie CreditMetrics, KMV's Portfoliomanager, CreditPortfolioView und CreditRisk+ im Einklang mit den mehr akademischen Ansätzen zur Modellierung von kreditrisikobehafteten Wertpapieren stehen (wobei bei den akademischen Ansätzen mehr die Preisbestimmung dieser Wertpapiere im Vordergrund steht). Es zeigt sich weiter, dass rein auf Ausfallwahrscheinlichkeiten und Korrelationen beruhende Varianten der obigen Modelle nach Parameterharmonisierung Risikokenngrößen liefern, die nicht signifikant verschieden sind. Eine gemeinsame Schwäche aller Modelle ist, daß jedes Parameter beinhaltet, die die Risikoparameter signifikant beeinflussen, die jedoch wegen mangelnder Verfügbarkeit geeigneter Daten vom Risikomanager auf qualitativer Basis eingestellt werden müssen (etwa die Ausfallkorrelationen oder die Volatilität der Ausfallintensität).

Betrachtet man die komplexeren Versionen der obigen Modelle (z.B. mit verschiedenen Ratingkategorien und Transitionsmatrizen, ..), so wird die Analyse noch schwieriger. Gegenwärtig gibt es nur relativ wenige Studien, die komplexere Versionen der Modelle systematisch von der empirischen Seite her untersuchen. Eine Studie von Gordy (Gordy (1999)) diskutiert unter ähnlichen Annahmen wie wir CreditRisk+ und CreditMetrics. Mittels Simulationen zeigt Gordy, daß die Risikomaße, die mit beiden Modellen erzeugt werden können, nach einer Reparametrisierung vergleichbar sind. Crouhy, Galai und Mark (Crough, Galai und Mark (1999)) vergleichen vier verschiedene Kreditrisikomodelle mittels eines Benchmarkportfolios von 1800 Bonds, das über 13 Länder diversifiziert ist und ein weites Spektrum von Ländern, Fälligkeiten und Kreditqualitäten beinhaltet. Die Schätzungen des Risikoparameters VaR weichen voneinander ab: die höchste Schätzung ist 50% größer als die kleinste. Der von Crouhy, Galai und Mark daraus gezogenen Schlussfolgerung, daß Kreditrisikomodelle Risiko korrekt einschätzen, möchten wir auf Grund dieser Ergebnisse nicht zustimmen.

Die einzige Arbeit, die Kreditrisikomodelle auf einer out-of-sample Basis untersucht ist Nickell, Perraudin und Varotto (Nickell, Perraudin und Varotto (1998)). Diese Autoren betrachten zwei Klassen von Kreditrisikomodellen, wobei eines CreditMetrics-ähnlich strukturiert und ein anderes vom strukturellen (Merton) Typ ist. Sie untersuchen die VaR Schätzungen dieser Modelle für ein Portfolio von internationalen US Dollar denominierten Bonds über rollenden 12 Monats Perioden zwischen 1988 und 1998. Die Ergebnisse dieser Untersuchung zeigen mehr Verletzungen der VaR-Bänder als dies bei einer exakten Risikovorhersage zu erwarten wäre.

Selbst die in der Praxis verwendeten komplexeren Modelle weisen noch gewisse Schwächen im theoretischen Aufbau auf. Betrachtet man Modelle, die Ratingklassen benutzen und damit die Modellierung von Wertveränderungen durch Ratingübergänge erlauben (etwa CreditMetrics und implizit auch CreditRisk+), wird für die Preisberechnung angenommen, daß die vom Markt verlangte zusätzliche Verzinsung (gemessen in den Spreads über vergleichbaren risikofreien Wertpapieren) deterministisch ist. Kiesel, Perraudin und Taylor (Kiesel, Perraudin und Taylor (1999)) verallgemeinern den CreditMetrics Ansatz auf ein Modell, das stochastische Spreads erlaubt und zeigen, dass dies signifikante Auswirkungen auf die Risikokenngrößen für Portfolios mit relativ hoher Kreditqualität hat. Für die auf dem strukturellen (Merton) Ansatz basierenden Modelle (KMV) stellt sich die Frage, inwieweit die von Kreditqualität unabhängigen Wertpapiermarktveränderungen einen Einfluß auf die Kreditrisikoparameter haben.

Der Hauptvorteil der Kreditrisikomodelle ist sicherlich ihre Fähigkeit einer quantitativen Analyse von Portfolios von Kreditrisiken. Mittels der Modelle ist es möglich, Konzentrationsrisiken zu identifizieren, Hedgingstrategien zu entwickeln und ökonomisches Kapital sinnvoll einzusetzen. Ein Beispiel für eine solche Analyse ist eine Studie von Lehrbaß (Lehrbaß (1999)), die die Anwendbarkeit von Kreditrisikomodellen zur Portfoliosteuerung gemäß RORAC diskutiert. Hierbei ist es notwendig, risikoadjustierte Renditen zu berechnen, wobei Risiko via VaR gemessen wird. (Da Portfoliosteuerung prinzipiell zu komplexen Optimierungsproblemen führt, kommt der effizienten Berechnung des VaR eine große Bedeutung zu: Lehrbaß argumentiert in diesem Zusammenhang für CreditRisk+.)

Zusammenfassend bleibt zu sagen, dass mittels Kreditrisikomodelle grosse Fortschritte hinsichtlich einem besseren Verständnis der Struktur von Kreditrisiko gemacht wurde (obwohl noch viele Fragen offen bleiben, vgl. etwa die Diskussion in

Jackson und Perraudin (1999)). Hinsichtlich der Aussagekraft und Verlässlichkeit der von den Modellen gelieferten Risikoparameter bestehen jedoch noch signifikante Zweifel.

## Literatur

Alexander, C. und Phelan, K. (1999): *Different Strokes*, CreditRISK, October 1999, 32—35.

Ammann, M. (1999): *Pricing Derivative Credit Risk*, Springer Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems 470.

Bingham, N.H. und Kiesel, R. (1998): *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer Finance.

Caouette, J.B.; Altman, E.I. und Narayanan, P. (1998): *Managing Credit Risk, The Next Great Financial Challenge*, Wiley Frontiers in Finance, Wiley & Sons, Inc, New York.

Carty, L.V. und Lieberman, D. (1996): *Defaulted Bank Loan Recoveries*, Moody's Investor Service, Global Credit Research.

Crouhy, M.; Galai, D. und Mark, R. (1999): *A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models*, erscheint in Journal of Banking and Finance.

Das, S. (1998): *Credit Derivatives. Trading & Management of Credit & Default Risk*, Wiley Frontiers in Finance, Wiley & Sons, Inc, Asia.

Gordy, M. (1999): *A Comparative Anatomy of Credit Risk Models*, erscheint in Journal of Banking and Finance.

Gupton, G.M.; Finger, C.C. und Bhatia, M. (1997): *CreditMetrics – Technical Document*, Morgan Guaranty Trust Co.

Jackson, P. und Perraudin, W. (1999): *The nature of credit risk: the effect of maturity, type of obligor, and country of domicile*, Bank of England, Financial Stability Review, November 1999, 128--140.

Jackson, P. ; Furfine, C.; Groeneveld, H.; Hancock, D.; Jones, D.; Perraudin, W.; Radecki, L. und Yoneyama, M. (1999): *Capital Requirements and Bank Behaviour: The Impact of the Basle Accord*, Basle Committee on Banking Supervision Working Paper (No 1 – April 1999).

Jarrow, R.A.; Lando, D. und Turnbull, S. (1997): *A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads*, Review of Financial Studies, 10(2), 481—523.

Jones, D. (1999): *Emerging Problems with the Accord: Regularory Capital Arbitrage and Related Issues*, erscheint in Journal of Banking and Finance.

Kaplan, R. und Urwitz, G. (1979): *Statistical Models of Bond Ratings: A Methodology Inquiry*. Journal of Business, 62, 317—325.



- Kealhofer, S. ; Kwok, S. und Wenlong, W. (1998): *Uses and abuses of bond default rates*, CreditMetrics Monitor, 1<sup>st</sup> quarter, 37—55.
- Kiesel, R.; Perraudin, W. und Taylor, A.P. (1999): *The Structure of Credit Risk*, Birkbeck College mimeo, submitted for publication.
- Koyluoglu, H.U. und Hickmann A. (1998): *A Generalized Framework for Credit Portfolio Models*, Working Paper, Oliver, Wyman & Company..
- Lehrbaß, F.B. (1999): *Risikomessung für ein Kreditportfolio – Ein Methodenvergleich*. Die Bank, 2, 130—134.
- Merton, R.C. (1973): *Theory of Rational Option Pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141—183.
- Merton, R.C. (1974): *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*. Journal of Finance 29, 449—470.
- Miller, R. (1998): *Refining ratings*, Risk, August, p.97—99.
- Nickell, P. ; Perraudin, W. und Varotto, S. (1998): *Ratings- versus Equity-Based Credit Risk Models: An Empirical Investigation*, unpublished Bank of England mimeo.
- Nickell, P.; Perraudin, W. und Varotto, S. (1999): *Stability of Rating Transitions*, erscheint in Journal of Banking and Finance.
- Ong, M.K. (1999): *Internal Credit Risk Models. Capital Allocation and Performance Measurement*, Risk Books, London.
- Perraudin, W. und A.P.Taylor (1999): *On the Consistency of Bond Spreads and Ratings*, unpublished Birkbeck College mimeo.
- Saunders, A. (1999): *Credit Risk Measurement. New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms*. Wiley Frontiers in Finance, Wiley & Sons, Inc, New York.
- Schmid, B. (1998): *Credit Risk – Verschiedene Methoden zur Berechnung von Kreditrisiken*, Risklab Research Paper, 9807.
- Schmid, B. und R. Zagst (1999): *A Three-Factor Defaultable Term Structure Model*, Risklab Research Paper, 9902.
- Wilson, T, (1997a): *Portfolio Credit Risk*, Risk September, 111-117.
- Wilson, T, (1997b): *Portfolio Credit Risk*, Risk Oktober, 56-61.
- Zhou, C. (1997). *Default Correlation: An Analytical Result*, Working Paper, Federal Reserve Board.