ulm university universität
uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschafts-wissenschaften
Institut für Numerische Mathematik

Numerische Methoden zum Lösen der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung für den Intraday-Handel mit Strom

Masterarbeit in Mathematik an der Universität Ulm

Vorgelegt von:
Constantin Greif
constantin.greif@uni-ulm.de

Gutachter:
Prof. Dr. Karsten Urban
Prof. Dr. Rüdiger Kiesel

Betreuer:
Prof. Dr. Karsten Urban
Dr. Silke Glas

Fassung 30.Oktober 2018

© 2018 Constantin Greif

Satz: PDF-LaTeX 2ε

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung in der Optimalsteuerung **5**

2.1 Stochastische Optimalsteuerungsprobleme 6

2.1.1 Dynamik des Zustandsvektors 7

2.1.2 Die Wertfunktion 10

2.2 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung 12

2.2.1 Die HJB Gleichung 13

2.2.2 Dynamische Programmierung 14

2.2.3 Gleichmäßige Stetigkeit der Wertfunktion 15

2.3 Viskositätslösung 16

2.3.1 Parabolische Operatoren 17

2.3.2 Die Viskositätslösung 19

2.3.3 Vergleichsprinzip 21

2.4 Die Viskositätslösung der HJB Gleichung 23

3 Die HJB Gleichung für den Intraday-Handel **25**

3.1 Intraday-Handel mit erneuerbaren Energien 27

3.1.1 Day-Ahead mit stetigem Intraday-Handel 27

3.1.2 Dynamik des Strommarktes 27

3.1.3 Wertfunktion 29

3.2 Konventionelle Produktion für den Endwert 30

3.3 Die HJB Gleichung für den Intraday-Handel 31

3.3.1 HJB Gleichung 32

3.3.2 Überprüfung der Voraussetzungen 33

3.4 Analytische Lösung der HJB Gleichung für Spezialfall 36

4 Numerische Methoden zum Lösen der HJB Gleichung **39**
4.1 Die Barles-Souganidis Konvergenztheorie 40
4.2 Howard's Algorithmus 42
4.3 Finite-Differenzen-Methode 45
4.3.1 Vorwärts-Differenzen 47
4.3.2 Zentrale Differenzen 48
4.4 Weitere existierende Methoden 49

5 Analyse des Endwerts **51**
5.1 Deterministisches Optimierungsproblem für den Endwert 51
5.2 Theoretische Analyse 53
5.2.1 Wohldefiniertheit 53
5.2.2 Konkrete Form der Funktionen 55
5.2.3 Bestimmung des Minimums 57
5.3 Numerische Analyse 58

6 Numerische Ergebnisse **62**
6.1 Fehlerplots für analytischen Spezialfall 62
6.2 HJB aus dem Intraday-Handel 67

7 Fazit und Ausblick **69**

Literaturverzeichnis **74**

1 Einleitung

Als Antwort auf die globale Erwärmung wurden in vielen Ländern die Mittel zur Erzeugung von erneuerbaren Energien immer weiter ausgebaut. Diese Energien lassen sich schwer speichern und müssen deshalb zu dem Zeitpunkt verbraucht werden, zu dem sie gewonnen wurden. Aus diesem Grund wird prognostizierte Stromerzeugung aus erneuerbaren Energien verkauft, damit der Strom bereits einen Abnehmer hat, sobald er erzeugt wird. Neben dem langfristigen Handel von Strom, welcher auf dem Forward/Futures-Markt erfolgt, wurde im Zuge dessen der kurzfristige Handel mit erneuerbaren Energien auf dem Strommarkt, speziell der stetige Intraday-Handel, immer relevanter.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es für eine Agentin, die am Intraday-Strommarkt mit erneuerbaren Energien handelt, eine optimale Handelsstrategie zu finden. Optimal in dem Sinne, dass ihr Gewinn am Ende der Handelsperiode, d.h. nach einem Tag, maximiert wird. Wie im bekannten Black-Scholes-Modell, werden Kurse/Prognosen durch Wiener-Prozesse mit Drift modelliert. Mit dem Ziel den Gewinn zu maximieren, ergibt sich daraus ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem.

Um die Lösung dieses Optimalsteuerungsproblems zu finden, kann, nach dem Prinzip der Dynamischen Programmierung, die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung, eine partielle Differenzialgleichung (PDGl), gelöst werden. Allgemein nimmt die HJB Gleichung mit Randbedingung dann folgende Form an:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \inf_{q \in Q} \{L^q u + f^q\} = 0 \quad &\text{in} \quad (0,T) \times \Omega \\ u = g \quad &\text{auf} \quad (0,T) \times \partial\Omega \cup \{T\} \times \Omega, \end{aligned}$$

wobei $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Zustandsmenge mit Rand $\partial\Omega$, L ein linearer Differenzialoperator zweiter Ordnung, Q eine kompakte Menge, f eine Kostenfunktion

und g die Dirichlet-Randbedingung sind. Gesucht wird eine Lösungsfunktion u.

Es kann nicht garantiert werden, dass diese HJB Gleichung eine klassische Lösung besitzt. Um dennoch die Eindeutigkeit unter mehreren punktweisen fast überall Lösungen der Gleichung zu bekommen, wird ein alternativer Lösungsbegriff benötigt. Aus diesem Grund wird die Viskositätslösung der Gleichung gesucht. Für diese kann gezeigt werden, dass unter Voraussetzungen die Lösung des Optimalsteuerungsproblems gleich der eindeutigen Viskositätslösung der HJB Gleichung ist. Demnach brauchen wir für die numerische Auswertung Methoden, die speziell die Konvergenz gegen die Viskositätslösung garantieren können.

In dieser Arbeit werden wird von verschiedenen Teilgebieten der angewandten Mathematik Gebrauch machen. Um den Intraday-Strommarkt zu beschreiben, werden wirtschaftswissenschaftliche Begriffe und Konzepte verwendet. Für die Theorie der stochastischen Optimalsteuerung wird stochastische Analysis und Optimierung benötigt. Durch die HJB Gleichung hat die Theorie von partiellen Differenzialgleichungen auch einen Anteil, speziell die Theorie der Viskositätslösungen. Und um die approximierte Lösung zu finden, wird von dem Gebiet der Numerischen Mathematik Gebrauch gemacht.

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden wir mit Notationen und Definitionen stochastische Optimalsteuerungsprobleme einführen und mit Voraussetzungen die Wohlgestelltheit der stochastischen Prozesse und des Optimalsteuerungsproblems erlangen. In der stochastischen Optimalsteuerung ist das Ziel ein Kostenfunktional mit Hilfe einer Steuerungsfunktion über die Zeit zu minimieren. Das gesuchte minimale Kostenfunktional ist die Wertfunktion. Es kann gezeigt werden, dass unter Voraussetzungen diese Wertfunktion die Lösung der zugehörigen HJB Gleichung ist. Demnach wird die HJB Gleichung verwendet, um die Lösung des Optimalsteuerungsproblems zu finden.

In einem laufenden Projekt, als Kooperation der Universität Duisburg-Essen und der Universität Ulm, ist das Ziel, den Intraday-Handel in einem Modell möglichst realitätsnah zu modellieren und dieses Modell zu lösen. Aus diesem Modell resul-

tiert ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem mit zugehöriger HJB Gleichung, welches in Kapitel 3 beschrieben wird.

In Kapitel 4 fassen wir zusammen, welche Eigenschaften ein Approximationsschema erfüllen muss, sodass die Konvergenz der Lösungen dieses Schemas gegen die Viskositätslösung der HJB Gleichung garantiert ist. Nach der Barles-Souganidis Konvergenztheorie muss ein Approximationsschema dafür bestimmte Konsistenz-, Stabilitäts- und Monotonievoraussetzungen erfüllen. Die aus dem Schema resultierenden diskreten Gleichungen werden mit Howard's Algorithmus gelöst. Wir wenden zwei Finite-Differenzen-Methoden auf die HJB Gleichung aus dem Intraday-Handel an, welche die Konvergenz gegen die Viskositätslösung garantieren können.

Der Endwert der Wertfunktion stellt selbst ein deterministisches Optimierungsproblem dar. In Kapitel 5 werden wir zeigen, dass dieser Endwert wohldefiniert ist und wir werden den Endwert numerisch berechnen. Dadurch ist das Optimierungsproblem des Endwertes gelöst und der Endwert kann als Funktion verwendet werden.

In Kapitel 6 zeigen wir numerische Ergebnisse. Zum Schluss kommt noch ein Fazit und Ausblick. Zur Veranschaulichung und als roter Faden für die Arbeit siehe Abbildung 1.1.

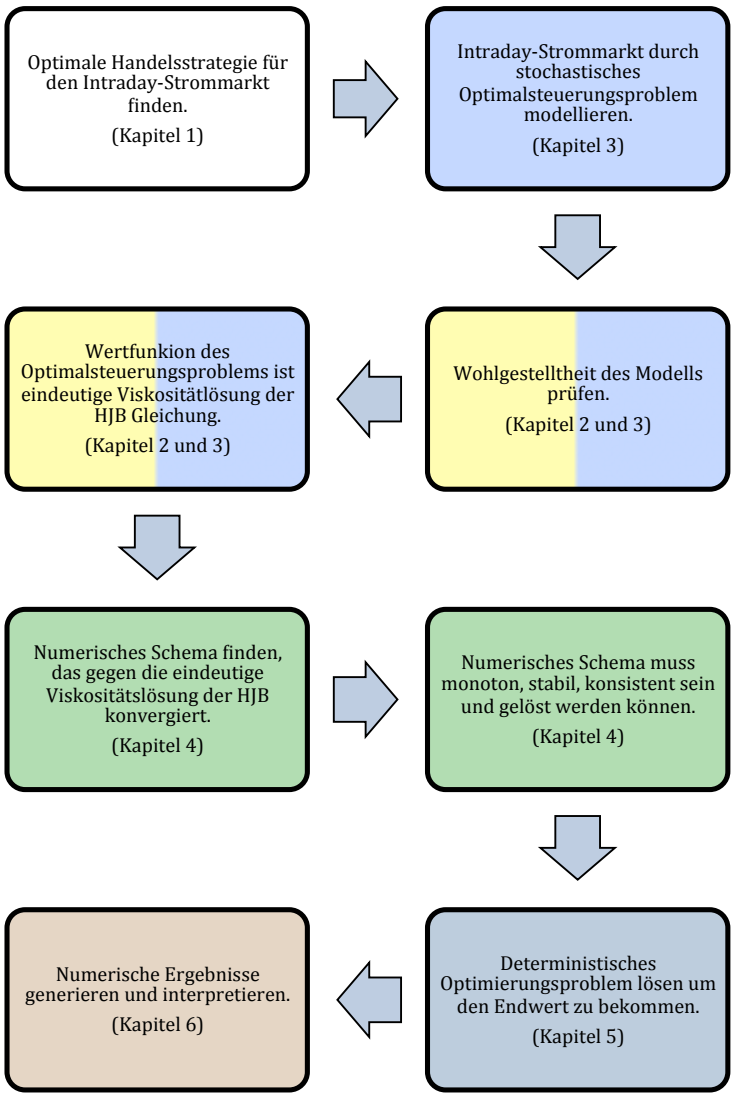


Abbildung 1.1: Zusammenhang der Arbeit

2 Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung in der Optimalsteuerung

In diesem Kapitel beschreiben wir, wie aus stochastischen Optimalsteuerungsproblemen die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung, eine spezielle partielle Differenzialgleichung, hervorgeht und wie diese genutzt werden kann, um die Lösung des Steuerungsproblems zu finden.

In Abschnitt 2.1 werden stochastische Optimalsteuerungsprobleme vorgestellt, in Abschnitt 2.2 führen wir die HJB Gleichung ein, in Abschnitt 2.3 stellen wir den Begriff der Viskositätslösung vor und in Abschnitt 2.4 beenden wir das Kapitel damit, dass die Lösungsfunktion eines Optimalsteuerungsproblems die eindeutige Viskositätslösung der zugehörigen HJB Gleichung ist.

Das Ziel in der stochastischen Optimalsteuerung ist es, einen Zustandsvektor so zu steuern, dass dieser ein bestimmtes Zielfunktional optimiert. Der Prozess des Zustandsvektors X entwickelt sich dabei über die Zeit, wobei seine Dynamik von einer Drift- und einer Volatilitätsfunktion abhängt. Des Weiteren lässt sich der zeitliche Verlauf von X durch eine Steuerungsfunktion $q(\cdot)$ manipulieren.

Das Zielfunktional ist in unserem Fall ein reellwertiges Kostenfunktional $J(\cdot)$, welches minimiert werden soll. Genauer gesagt ist das Kostenfunktional der Erwartungswert der integrierten laufenden Kosten plus der finalen Kosten zum Endzeitpunkt. Das minimale Kostenfunktional für die optimale Steuerung $q^*(\cdot)$ wird dann Wertfunktion u genannt. Das Optimalsteuerungsproblem zu lösen bedeutet also sowohl $q^*(\cdot)$ als auch u zu bestimmen.

Die theoretischen Aussagen in diesem Kapitel benötigen wir, um diese anschließend auf das stochastische Optimalsteuerungsproblem, welches aus dem Modell des Intraday-Handels hervorgeht, anzuwenden. Der Zustandsvektor ist dabei zum Zeitpunkt t gleich $(Y_t, X_t, D_t) \in \mathbb{R}^3$, wobei Y_t für den Verkaufspreis zum Zeitpunkt t, X_t für die Handelsposition zum Zeitpunkt t und D_t für die prognostizierte Stromerzeugung aus Erneuerbaren für den Endzeitpunkt steht. Die Steuerung im Zeitpunkt t entspricht der Veränderung der Handelsposition, was einem Kauf oder Verkauf entspricht. Die laufenden Kosten im Intraday Modell bestehen dann aus dem Verkaufspreis verrechnet mit der aktuellen Steuerung, d.h. mit der aktuellen Handelsaktivität. Die finalen Kosten ergeben sich aus den Kosten für die konventionelle Produktion plus einem Strafterm für eine positive oder negative Position zum Endzeitpunkt.

Aus dem Optimalsteuerungsproblem mit beschränktem Definitionsbereich leitet sich eine HJB Gleichung mit Dirichlet Randbedingungen ab. Es ist nicht garantiert, dass diese HJB Gleichung eine klassische Lösung besitzt. Stattdessen suchen wir nach der Viskositätslösung, einer verallgemeinerten Lösung, dieser Gleichung. Für diese kann gezeigt werden, dass die Wertfunktion die eindeutige Viskositätslösung der HJB Gleichung ist. Das gibt uns die Motivation die HJB Gleichung lösen zu wollen, um dadurch das Optimalsteuerungsproblem zu lösen.

Hauptquellen für dieses Kapitel sind [14] von W. H. Fleming, [22] von J. Yong und X.Y. Zhou und für die stochastische Theorie [23] von B. Øksendal. Des Weiteren wurde sich für die Struktur und die Auswahl der Theoreme an [19] von I. Smears orientiert.

2.1 Stochastische Optimalsteuerungsprobleme

In diesem Abschnitt werden wir Voraussetzungen an die Dynamik des Zustandsvektors X formulieren (vgl. Voraussetzung $2.1.4$), womit der Prozess des Zustandsvektors die eindeutige Lösung für die stochastische Differenzialgleichung (2.3) ist (vgl. Theorem $2.1.5$). Anschließend werden das Kostenfunktional und die Wertfunktion definiert.

2.1.1 Dynamik des Zustandsvektors

Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ beschreibt die Entwicklung des Zustandsvektors. Der zeitliche Verlauf des Prozesses ist bestimmt durch einen Drift und durch einen Wiener-Prozess, der sich zufällig entwickelt. Außerdem kann der Verlauf des Prozesses durch eine Steuerungsfunktion $q(\cdot)$ kontrolliert werden. Um das stochastische Modell des Zustandsvektors zu beschreiben, brauchen wir vorerst ein paar Notationen.

Sei $T > 0$ und $[0, T]$ das kompakte Zeitintervall. Sei weiter $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ die beschränkte und offene Zustandsmenge, i.e. die Menge in dem X seine Werte annimmt. Wir benutzen folgende Notationen:

$$\Omega_T := (0, T) \times \Omega,$$
$$\partial^*\Omega_T := (0, T) \times \partial\Omega \cup \{T\} \times \Omega,$$

wobei $\partial\Omega$ der Rand von Ω ist. Mit $\overline{\Omega}_T$ bezeichnen wir den Abschluss von Ω_T.

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$ und ein Wiener-Prozess $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$.

Definition 2.1.1. *Das Tripel $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum, wenn Λ eine nichtleere Menge, $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Λ und $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.*

Definition 2.1.2. *In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Lambda, \mathcal{F}, P)$ nennen wir $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ einen Wiener-Prozess, wenn gilt*

(i) $W_0 = 0$*,*

(ii) W_t *ist fast sicher überall in* t *stetig,*

(iii) W_t *hat unabhängige Zuwächse, für welche* $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ *für alle* $0 \leq s \leq t$*.*

Sei weiter $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ die vom Wiener-Prozess $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ erzeugte aufsteigende Familie von σ-Algebren. Aufsteigend in dem Sinne, dass $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ für $0 \leq s \leq t \leq T$. Außerdem sei $\mathcal{F}_\infty$ die kleinste σ-Algebra, die $\bigcup\limits_{t\in[0,T]} \mathcal{F}_t$ enthält.

Die Steuerung soll Werte in Q annehmen, wobei Q ein kompakter metrischer Raum ist. Wir nennen eine Funktion $q(\cdot) \in \mathcal{A}$ eine **Steuerung**, wobei

$$\mathcal{A} \subset \{q(\cdot) | q : [0,T] \times \Lambda \to Q \text{ ist ein progressiv messbarer Prozess } \}.$$

Für $t \in [0,T]$ und $t \leq s \leq T$ sei $\mathcal{B}_s$ die Borel σ-Algebra auf $[t,s]$.

Definition 2.1.3. *Ein Prozess $q(\cdot)$, der Werte in Q annimmt und auf $[t,T] \times \Lambda$ definiert ist, heißt $\mathcal{F}_s$-progressiv messbar, falls die Abbildung $(r,w) \to q(r,w)$ von $[t,s] \times \Lambda$ nach Q, $\mathcal{B}_s \times \mathcal{F}_s$-messbar ist für alle $s \in [t,T]$.*

Der Prozess heißt $\mathcal{F}_s$-adaptiert, falls $q(s,\cdot)$ für $s \in [t,T]$ eine $\mathcal{F}_s$-messbare und Q-wertige Zufallsvariable ist.

Jeder $\mathcal{F}_s$-progressiv messbare Prozess ist auch $\mathcal{F}_s$-adaptiert. Wir nennen einen Prozess progressiv messbar, falls dieser $\mathcal{F}_s$-progressiv messbar ist für alle $\mathcal{F}_s$ in $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$.

In dieser Arbeit nehmen wir nur Markov-Steuerungen an, was bedeutet, dass diese nur von dem aktuellen Zeitpunkt und Zustand abhängen, i.e. $q_s = q(s, X_s)$ für $(s, X_s) \in \overline{\Omega}_T$.

Die Dynamik des Zustandsvektors hängt von einer Drift-Funktion $\mu^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : Q \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und einer Volatilität $\sigma^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : Q \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times n}$ ab, welche angenommen werden die nachfolgenden Voraussetzungen $2.1.4$ zu erfüllen. Wir stellen diese zusammen, um im Verlauf der Arbeit leichter darauf referenzieren zu können.

Voraussetzung 2.1.4. *Für μ und σ gelte:*

(i) Die Funktionen $\mu^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : Q \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $\sigma^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : Q \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times n}$ seien stetig.

(ii) Für jedes $q \in Q$ seien $\mu^q(\cdot,\cdot), \sigma^q(\cdot,\cdot) \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^d)$.

(iii) Es existiere eine Konstante $K \geq 0$, sodass für alle $q \in Q$ und $(t,x),(s,y) \in$

$[0,T]\times\mathbb{R}^d$ *gilt*

$$\begin{aligned}|\mu^q(t,x)-\mu^q(s,y)| &\le K(|x-y|+|t-s|),\\ |\sigma^q(t,x)-\sigma^q(s,y)| &\le K(|x-y|+|t-s|),\\ |\mu^q(t,x)| &\le K(1+|x|),\\ |\sigma^q(t,x)| &\le K(1+|x|),\end{aligned}$$

mit der Frobeniusnorm $|\sigma| = \left(\sum_{i,j}|\sigma_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Nach der Vorarbeit kann jetzt der Prozess des Zustandsvektors definiert werden. Sei dafür der Itô-Prozess $\{X_s\}_{s\in[t,T]}$ eine Lösung der stochastischen Differenzialgleichung (SDGl) (2.3).

$$dX_s = \mu^{q_s}(s,X_s)ds + \sigma^{q_s}(s,X_s)dW_s \text{ mit } s\in(t,T], \tag{2.3a}$$

$$X_t = x, \tag{2.3b}$$

wobei $\{W_s\}_{t\le s\le T}$ der $d-$dimensionaler Wiener-Prozess ist.

Die Voraussetzungen $2.1.4$ garantieren, dass für jede Markov-Steuerung $q(\cdot)\in\mathcal{A}$ die stochastische Differenzialgleichung (SDGl) (2.3) wohldefiniert ist. Hierfür zitieren wir ein Theorem.

Theorem 2.1.5. *[23, Seite 70]*

Sei $T>0$ *und seien* $\tilde{\mu}(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d, \tilde{\sigma}(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d\times n}$ *messbare Funktionen, für welche eine Konstante* $K\ge 0$ *existiert, sodass für* $t\in[0,T]$ *und* $s,y\in\mathbb{R}^d$ *gilt*

$$\begin{aligned}|\tilde{\mu}(t,x)-\tilde{\mu}(t,y)| &\le K|x-y|,\\ |\tilde{\sigma}(t,x)-\tilde{\sigma}(t,y)| &\le K|x-y|,\\ |\tilde{\mu}(t,x)|+|\tilde{\sigma}(t,x)| &\le K(1+|x|).\end{aligned}$$

Sei Z *eine Zufallsvariable unabhängig von* $\mathcal{F}_\infty$*, sodass* $\mathbb{E}[|Z|^2]<\infty$.

Dann hat die SDGl

$$dX_s = \tilde{\mu}(s, X_s)ds + \tilde{\sigma}(s, X_s)dW_s \text{ mit } s \in (t, T],$$

mit $X_0 = Z$ eine eindeutige Lösung $\{X_s\}_{s\in[0,T]}$. Außerdem ist $X_{(\cdot)}(w) : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ stetig für fast alle $w \in \Lambda$. Der Prozess $X_t(w)$ ist $(\{\mathcal{F}_t^Z\}_{t\in[0,T]})$-adaptiert, wobei $\mathcal{F}_t^x$ von Z und $\{W_s\}_{s\in[0,T]}$ erzeugt ist.

Beweis. Siehe von Bernt Øksendal [23, Seite 71]. □

Die Abbildung $X_{(\cdot)}(w) : [0, T] \to \mathbb{R}^d, t \to X_t(w)$ für ein Ergebnis $w \in \Lambda$ nennt man Pfad des Prozesses. Das Theorem wird in unserem Fall auf

$$\tilde{\sigma}(t, x) := \sigma^{q(t,x)}(t, x), \qquad \tilde{\mu}(t, x) := \mu^{q(t,x)}(t, x),$$

für $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d$ angewandt. Zur Veranschaulichung sei (2.5) ein Beispiel für einen stochastischen Prozess der Form (2.3).

Beispiel 2.1.6. *Sei W_t ein 1-dimensionaler Wiener-Prozess mit $W_0 = 0$. Dann wird die* (2.5) *von $X_t = e^{W_t}$ gelöst.*

$$dX_s = \frac{X_s}{2}ds + X_s dW_s \text{ für } s \in (0, T] \tag{2.5a}$$

$$X_0 = 1. \tag{2.5b}$$

2.1.2 Die Wertfunktion

Der Prozess $\{X_s\}_{[t,T]}$ (2.3) terminiert, wenn entweder $t = T$ ist oder wenn X_s den Bereich $\overline{\Omega}$ für ein $s < T$ verlässt. Diesen Endzeitpunkt definieren wir als

$$\tau = \inf\{s > t | (s, X_s) \notin \overline{\Omega}_T\}.$$

Es folgt, dass τ eine Stoppzeit nach Definition $2.1.7$ ist.

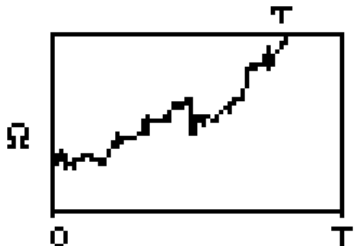


Abbildung 2.1: Skizzierung der Stoppzeit τ

Definition 2.1.7. *Sei $\{\mathcal{F}_s\}_{s\geq 0}$ eine wachsende Familie von σ-Algebren mit $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$. Eine Funktion $\tau : \Lambda \to [0,\infty]$ heißt eine Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_s\}_{s\geq 0}$, falls*

$$\{\omega \in \Lambda | \tau(\omega) \leq s\} \in \mathcal{F}_s \text{ für alle } s \geq 0.$$

Wie in der Einleitung erwähnt, besteht das Kostenfunktional aus dem Erwartungswert der integrierten laufenden Kosten bis zum Zeitpunkt τ plus den finalen Kosten. Die laufenden Kosten $f^{(\cdot)}(\cdot) : Q \times \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ und die finalen Kosten $g(\cdot) : \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ sollen dabei folgende Voraussetzungen erfüllen.

Voraussetzung 2.1.8. *Für f und g gelten:*

(i) $f^{(\cdot)}(\cdot) : Q \times \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ *und* $g(\cdot) : \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ *seien stetig.*

(ii) Es existiere eine Konstante $K \geq 0$, sodass für alle $q \in Q$ und $(t,x),(s,y) \in \overline{\Omega}_T$ gilt

$$\begin{aligned} |f^q(t,x) - f^q(s,y)| &\leq K(|x-y| + |t-s|), \\ |f^q(t,x)| &\leq K(1+|x|), \\ |g(x)| &\leq K(1+|x|). \end{aligned}$$

Jetzt können wir das Kostenfunktional und die Wertfunktion definieren.

Definition 2.1.9. *Das **Kostenfunktional** $J^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : \mathcal{A} \times [0,T] \times \mathbb{R}^d$ ist definiert als:*

$$J^{q(\cdot)}(t,x) := \mathbb{E}^{t,x}\Big[\int_t^\tau f^{q_s}(s,X_s)ds + g(\tau,X_\tau)\Big], \tag{2.7}$$

wobei $\mathbb{E}^{t,x}$ der Erwartungswert ist für $X_t = x$.

Definition 2.1.10. *Die **Wertfunktion** $u : \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ ist definiert als*

$$u(t,x) := \inf_{q(\cdot)\in\mathcal{A}} J^{q(\cdot)}(t,x), \tag{2.8}$$

für einen Prozess der Form (2.3)*.*

Für eine Markov-Steuerung garantiert das Theorem $2.1.5$ die Existenz und Eindeutigkeit von Prozessen und somit ist das Kostenfunktional (2.7) wohldefiniert, womit auch die Wertfunktion (2.8) wohldefiniert ist. Aus diesem Grund nehmen wir im Weiteren nur Markov-Steuerungen und damit Prozesse der Form (2.3) an.

Wie kann jetzt die Wertfunktion bestimmt werden? Das führt uns zu der HJB Gleichung, denn unter gewissen Voraussetzungen ist die eindeutige Lösung der HJB Gleichung die Wertfunktion.

2.2 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung

Die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung ist eine partielle Differenzialgleichung (PDGl), welche eine zentrale Rolle in der Optimalsteuerung spielt. Die Gleichung ist ein Resultat der von Richard Bellman eingeführten Theorie der Dynamischen Programmierung. In der klassischen Physik spielt die Hamilton-Jacobi Gleichung eine wichtige Rolle, um die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mittels einer besonderen kanonischen Transformation zu vereinfachen. Die HJB Gleichung kann als eine Übertragung der Hamilton-Jacobi Gleichung in stetige Zeit gesehen werden. Dieser Abschnitt dient dazu die HJB Gleichung durch das Theorem $2.2.1$ einzuführen. Es sei jedoch angemerkt, dass die strengen Voraussetzungen an dieses Theorem häufig nicht gelten, womit sich der zweite Teil des Kapitels beschäftigen wird.

2.2.1 Die HJB Gleichung

Theorem 2.2.1 (Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung)**.** *[23, Seite 246] Angenommen, $\mathcal{A}$ bestehe nur aus Markov-Steuerungen und es sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$. Außerdem gelte für jedes $(t,x) \in \Omega_T, q(\cdot) \in \mathcal{A}$ und für jede Stoppzeit $\bar{t} \leq \tau$, dass*

$$\mathbb{E}^{t,x}|u(\bar{t}, X_{\bar{t}})| + \mathbb{E}^{t,x}\left|\int_0^{\bar{t}} \partial_t u(s, X_s) - L^{q_s} u(s, X_s) ds\right| < \infty.$$

Sei weiter angenommen, dass eine optimale Steuerung $q^*(\cdot) \in \mathcal{A}$ existiere, so dass für alle $(t,x) \in \Omega_T$

$$u(t,x) = J^{q^*(\cdot)}(t,x),$$

und dass für alle $(t,x) \in \partial^*\Omega_T, P(\tau = t) = 1$ gilt.

Dann erfüllt die Wertfunktion u die HJB Gleichung

$$\partial_t u(t,x) + \min_{q \in Q}\{L^q u(t,x) + f^q(t,x)\} = 0 \text{ für } (t,x) \in \Omega_T \tag{2.9a}$$

$$u = g \text{ auf } \partial^*\Omega_T, \tag{2.9b}$$

mit

$$L^q u(t,x) = \text{Tr}[a^q(t,x) D^2 u(t,x)] + \mu^q(t,x) \cdot \nabla u(t,x) \tag{2.10a}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}^q(t,x) \partial_{x_i,x_j} u(t,x) + \sum_{i=1}^{d} \mu_i^q(t,x) \partial_{x_i} u(t,x) \tag{2.10b}$$

und $a^q(t,x) = (\sigma^q(t,x))^\top \sigma^q(t,x)$ für $q \in Q, (t,x) \in \overline{\Omega}_T$.

Beweis. Siehe von Bernt Øksendal [23, Seite 246].
Zusammengefasst besteht der Beweis aus zwei Schritten. Zuerst wird gezeigt, dass

$$\partial_t u(t,x) + \min_{q \in Q}\{L^q u(t,x) + f^q(t,x)\} \geq 0 \text{ in } \Omega_T.$$

Im zweiten Schritt wird dann mit stochastischer Analysis gezeigt, dass sich für jedes $(t,x) \in \Omega_T$ ein $q \in Q$ finden lässt, sodass $\partial_t u(t,x) + L^q u(t,x) + f^q(t,x) = 0$, womit das Theorem bewiesen ist. □

Es sei angemerkt, dass in (2.9a) $q \in Q$ im Gegensatz zu $q(\cdot) \in \mathcal{A}$ in (2.8) eine Punktauswertung ist.

Bemerkung 2.2.2. *Anstatt* (2.9a)*, kann auch folgende Form der HJB Gleichung verwendet werden*

$$-\partial_t u(t,x) + \max_{q \in Q}\{-L^q u(t,x) - f^q(t,x)\} = 0 \text{ in } \Omega_T, \tag{2.11}$$

wobei das Maximum ebenfalls erreicht wird, da Q kompakt ist und die Funktionen $L^{(\cdot)}u(x,t) \to \mathbb{R}$, $f^{(\cdot)}u(x,t) \to \mathbb{R}$ für $(t,x) \in \Omega_T$ nach Annahme stetig.

2.2.2 Dynamische Programmierung

Das Prinzip der Dynamischen Programmierung wurde in den 1940er Jahren von Richard Bellman eingeführt. Allgemein ist die Dynamische Programmierung eine Methode zum algorithmischen Lösen eines Optimierungsproblems durch Aufteilung in Teilprobleme und systematischer Speicherung von Zwischenresultaten.

Angenommen es konnte die Lösungsfunktion u der HJB Gleichung gefunden werden. Für die optimale Steuerung $q^*(\cdot)$ gilt dann

$$\partial_t u(t,x) + L^{q^*(t,x)}u(t,x) + f^{q^*(t,x)}u(t,x) = 0 \text{ für alle } (t,x) \in \Omega_T. \tag{2.12}$$

Ohne $q^*(\cdot)$ zu kennen kann mit Hilfe der Gleichung (2.12) eine optimale Steuerung gefunden werden.
Also angenommen für eine Steuerung $q^1(\cdot)$ gilt (2.12). Sei mit $q^1(\cdot)$ der Prozess $\{X_s\}_{s\in[t,T]}$ von der Form (2.3). Wenn $u \in C^2(\Omega_T)$ gilt mit Dynkin's Formel,

$$\mathbb{E}^{t,x}u(\tau, X_\tau) = u(t,x) + \mathbb{E}^{t,x}\int_t^\tau (\partial_t u(s,X_s) + L^{q^1(s,X_s)}u(s,X_s))ds. \tag{2.13}$$

Nun ist $q^1(\cdot)$ tatsächlich eine optimale Steuerung, denn $u(\tau, X_\tau) = g(\tau, X_\tau)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 und mit der Gleichung (2.12) erhält man

$$u(t,X_t) = \mathbb{E}^{t,x}\Big[\int_t^\tau f^{q_s^1}(s,X_s)ds + g(\tau,X_\tau)\Big] = J^{q^*(\cdot)}(t,x), \tag{2.14}$$

womit dann eine optimale Steuerung gefunden wurde.

Um das Optimalsteuerungsproblem zu lösen, muss also erst eine nichtlineare PDGl gelöst werden und anschließend eine Anzahl von algebraischen Optimierungsproblemen. Die HJB Gleichung ist dabei Ausgangspunkt für numerische Approximation (Siehe Lemma $2.4.1$).

2.2.3 Gleichmäßige Stetigkeit der Wertfunktion

Die Voraussetzungen an Theorem $2.2.1$ sind oft nicht erfüllt, etwa wenn die Wertfunktion nicht glatt genug ist. Zwar kann die Wertfunktion die HJB Gleichung dann immernoch punktweise fast überall erfüllen, jedoch haben wir dann nicht zwangsläufig die Eindeutigkeit [1]. Außerdem ist die Stetigkeit bis zum Rand, i.e. $u \in C(\overline{\Omega}_T)$, und das Erfüllen der Randbedingungen, i.e. $u = g$, nicht immer kompatibel [2].

Das Theorem von Krylov [14, S. 162] garantiert, dass die Wertfunktion in $C(\overline{\Omega}_T)$ ist und stetige t-Ableitung sowie stetige x-Ableitung erster und zweiter Ordnung besitzt. Eine Voraussetzung für das Theorem ist allerdings, dass der Differenzialoperator (2.10a) gleichmäßig elliptisch sein muss und, dass die Randfunktion $g \in C^3([0,T] \times \mathbb{R}^d)$. Diese Voraussetzungen sind allerdings nicht kompatibel mit der HJB Gleichung aus dem Intraday-Handel.

Dennoch können wir die gleichmäßige Stetigkeit der Wertfunktion erreichen. Dafür definieren wir folgende signierte Distanzfunktion

$$\rho(x) := \begin{cases} -\inf_{y \in \partial\Omega} |x - y| & \text{, falls } x \in \Omega \\ +\inf_{y \in \partial\Omega} |x - y| & \text{, falls } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Voraussetzung 2.2.3. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen* $2.1.4$ *und* $2.1.8$ *setzen wir voraus:*

[1] Siehe das Gegenbeispiel [19, S. 7], in dem sich für eine HJB Gleichung unendlich viele punktweise f.ü. Lösungen finden lassen.

[2] Siehe dafür das Beispiel [14, S. 61], mit der HJB Gleichung $-\partial_t + |\partial_x| = 0$, bei der es optimal für die Wertfunktion ist, den Rand zum meiden.

(i) Der Rand $\partial\Omega$ ist glatt, i.e. von der Klasse C^∞, und es existiert eine stetige Steuerung $q(\cdot) \in \mathcal{A}$, sodass für alle $(t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega$

$$L^{q(t,x)}\rho(x) = \mathit{Tr}[a^{q(t,x)}(t,x)D^2\rho(x)] + \mu^{q(t,x)}(t,x) \cdot \nabla\rho(x) > 0.$$

(ii) Der Randwert $g|_{(0,T]\times\mathbb{R}^d}$ kann zu $\tilde{g} \in C_b^3([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ erweitert werden, sodass gilt

$$-\partial_t\tilde{g} + \max_{q\in Q}\{-L^q\tilde{g}(t,x) - f^q(t,x)\} \leq 0 \text{ in } \Omega_T, \tag{2.15a}$$

$$\tilde{g}(\cdot,T) \leq g(\cdot,T) \text{ in } \Omega. \tag{2.15b}$$

Voraussetzung $2.2.3$ (i) garantiert dabei, dass der Prozess auf dem Rand jederzeit die Möglichkeit hat den Rand zu verlassen.

Durch Voraussetzung $2.2.3$ erhalten wir die gleichmäßige Stetigkeit der Wertfunktion.

Theorem 2.2.4. *[14, Seite 205] Unter den Voraussetzungen $2.2.3$ ist die Wertfunktion $u \in C(\overline{\Omega_T})$.*

Beweis. Siehe [14, Seite 205] von Wendell H. Fleming und H. Mete Soner. □

Die Problematik, dass punktweise f.ü. Lösungen der HJB Gleichung nicht eindeutig sind, motiviert die Viskositätslösung zu betrachten.

2.3 Viskositätslösung

Der Begriff der Viskositätslösung wurde in den frühen 1980er Jahren von Pierre-Louis Lions und Michael G. Crandall als eine Verallgemeinerung des klassischen Lösungsbegriffes einer partiellen Differnzialgleichung eingeführt.

Speziell wurde für die Gleichung $\partial_t u + H(\nabla u, x) = 0$, wobei H ein Hamilton-Operator ist, gezeigt, dass die Viskositätslösung davon der Grenzwert $u = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon$ einer Folge von glatten Lösungen der Gleichung $\partial_t u_\epsilon + H(\nabla u_\epsilon, x) = \epsilon\Delta u_\epsilon$ ist. Der

Term $\epsilon\Delta u$ bezeichnet in der Strömungsmechanik häufig die Viskosität und die Approximation $u \approx u_\epsilon$ ist die Methode der verschwindenden Viskosität. Anschließend wurde die Theorie für allgemeine partielle Differnenzialgleichungen zweiter Ordnung erweitert.

Die Viskositätslösung erreicht Existenz und Eindeutigkeit für viele PDGln und stimmt mit der klassischen Lösung überein, falls diese existiert.

In diesem Abschnitt nennen wir erst ein paar Eigenschaften von degeneriert elliptischen, bzw. degeneriert parabolischen, Operatoren. Anschließend motivieren und definieren wir die Viskositätslösung. Theorem $2.3.8$ gibt dann die Konsistenz- und Selektivitätseigenschaft, Theorem $2.3.12$ garantiert uns die Eindeutigkeit. Die Existenz einer Lösung folgt daraus, dass unter Voraussetzungen die Wertfunktion eine Viskositätslösung der HJB Gleichung ist.

2.3.1 Parabolische Operatoren

In diesem Abschnitt wird gegeben, dass der HJB Operator (vgl Proposition $2.3.5$) nach Definition $2.3.3$ degeneriert parabolisch und ordentlich ist.

Sei wieder $T > 0$ und Ω eine offene und beschränkte Menge. Wir betrachten einen abstrakten Differentialoperator $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, mit $F[u](t,x) = F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x), D^2u(t,x))$ für $(t,x) \in \Omega_T$, der die abstrakte Gleichung

$$-\partial_t u + F[u] = 0 \text{ in } \Omega_T = (0,T) \times \Omega, \tag{2.16}$$

erfüllt, wobei $S_n(\mathbb{R})$ die Menge der symmetrischen reellen Matrizen der Dimension n ist.

Im Fall der HJB Gleichung (2.11) ist

$$F[u](t,x) = \max_{q \in Q}\{-L^q u(t,x) - f^q(t,x)\} \text{ ,für } (t,x) \in \Omega_T, \tag{2.17}$$

mit L wie in (2.10a).

Definition 2.3.1. *Falls für einen Operator L der Form*

$$Lu(x) = \mathit{Tr}[a(x)D^2u(x)] + \mu(x) \cdot \nabla u(x) \text{ für } x \in \Omega, \tag{2.18}$$

gilt, dass für jedes $x \in \Omega$, $a(x) \in S_n(\mathbb{R})$ positiv definit ist, dann nennen wir L gleichmäßig elliptisch in Ω. Falls $a(x)$ nur symmetrisch positiv semidefinit ist für $x \in \Omega$, dann nennen wir L degeneriert elliptisch in Ω.

Eine wichtige Eigenschaft von degeneriert elliptischen Operatoren ist die Positivität bei einem Maximum.

Proposition 2.3.2. *[19, Seite 24] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Falls L von der From* (2.18) *ist, nach Definition $2.3.1$ degeneriert elliptisch ist und $u \in C^2(\Omega)$ ein Maximum in $x \in \Omega$ hat, dann gilt*

$$Lu(x) \geq 0.$$

□

Nun erweitern wir die Definition von degeneriert elliptischen Operatoren für nichtlineare Operatoren wie in der Gleichung (2.16).

Definition 2.3.3. *Sei $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein Operator.*

1. *$F(\cdot)$ heisst **degeneriert elliptisch**, falls für einen Vektor $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, ein Skalar $r \in \mathbb{R}$, Matrizen $P, Q \in S_n(\mathbb{R})$ mit $P \geq Q$ und $y \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass*

$$F(x, r, y, P) \leq F(x, r, y, Q), \tag{2.19}$$

   wobei $P \geq Q$ heisst, dass $P - Q$ positiv semidefinit ist.
   *Wir nennen den Operator $-\partial_t w + F[w]$ **degeneriert parabolisch**, falls $F(t, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ degeneriert elliptisch ist für alle $t \in (0, T)$.*

2. *$F(\cdot)$ heißt **ordentlich**, falls für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $r, l \in \mathbb{R}$ mit $r \geq l$, $P \in S_n(\mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass*

$$F(x, r, y, P) \geq F(x, l, y, P). \tag{2.20}$$

   *Wir nennen den Operator $-\partial_t w + F[w]$ **ordentlich**, falls $F(t, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ordentlich ist für alle $t \in (0, T)$.*

Proposition 2.3.4. *[19, Seite 25] Falls L von der Form* (2.18) *ist, dann ist F genau dann degeneriert elliptisch nach Definition* $2.3.3$*, wenn $a(x)$ positiv semidefinit ist, also L degeneriert elliptisch ist nach Definition* $2.3.1$*.* □

Proposition 2.3.5. *[19, Seite 25] Der HJB Operator $-\partial_t u + F[u]$, mit $F[u]$ wie* (2.17)*, ist degeneriert parabolisch und ordentlich.*

2.3.2 Die Viskositätslösung

Um den Begriff der Viskositätslösung für eine Gleichung $F[u] = 0$ in Ω zu motivieren, nehmen wir an, dass F degeneriert elliptisch und ordentlich ist und dass $u \in C^2(\Omega)$ mit $F[u] \leq 0$ (bzw. $F[u] \geq 0$) in Ω. Sei zusätzlich $\varphi \in C^2(\Omega)$ eine Testfunktion mit $u \geq \varphi$ (bzw. $u \leq \varphi$) in Ω und $u - \varphi$ habe ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum) in $x_0 \in \Omega$. Man betrachte zur Veranschaulichung Abbildung 2.2 links (bzw. rechts). O.B.d.A. hat das Maximum (Minimum) den Wert Null, d.h. $u(x_0) = \varphi(x_0)$. Dann erhalten wir $\nabla u(x_0) = \nabla \varphi(x_0)$ und $D^2 u(x_0) \leq D^2 \varphi(x_0)$ (bzw. $D^2 u(x_0) \geq D^2 \varphi(x_0)$).
Da F ordentlich und degeneriert elliptisch ist, ergibt sich

$$F(x_0, D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), \varphi(x_0)) \leq F(x_0, D^2 u(x_0), \nabla u(x_0), u(x_0)) \leq 0,$$

(bzw. $F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), \varphi(x_0), x_0) \geq F(D^2 u(x_0), \nabla u(x_0), u(x_0), x_0) \geq 0$). Falls eine klassische Lösung u von $F[u] = 0$ in Ω existiert, ist dies auch eine Viskositätslösung der Gleichung.

Abbildung 2.2: Skizzierung der Viskositätslösung

Definition 2.3.6. *[22, S.37] Sei der Operator $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig und $-\partial_t w + F[w]$ degeneriert parabolisch und ordentlich nach Definition $2.3.3$.*

1. *Eine Funktion $u \in USC(\overline{\Omega}_T)$ heißt **Viskositäts-Unterlösung** der Gleichung* (2.16)*, wenn für jede Testfunktion $\varphi \in C^{1,2}(\Omega_T)$, falls $u - \varphi$ ein lokales Maximum in $(t, x) \in \Omega_T$ hat, gilt:*

$$-\partial_t(t,x)\varphi + F(t,x,\varphi(t,x),\nabla\varphi(t,x),D^2\varphi(t,x)) \leq 0.$$

2. *Eine Funktion $u \in LSC(\overline{\Omega}_T)$ heißt **Viskositäts-Oberlösung** der Gleichung* (2.16)*, wenn für jede Testfunktion $\varphi \in C^{1,2}(\Omega_T)$, falls $u - \varphi$ ein lokales Minimum in $(t, x) \in \Omega_T$ hat, gilt:*

$$-\partial_t(t,x)\varphi + F(t,x,\varphi(t,x),\nabla\varphi(t,x),D^2\varphi(t,x)) \geq 0.$$

*Eine Funktion $u \in C(\Omega_T)$ heißt **Viskositätslösung** der Gleichung* (2.16)*, falls u sowohl eine Viskositäts-Unterlösung als auch eine Viskositäts-Oberlösung der Gleichung ist.*

$USC(\overline{\Omega}_T)$ bezeichnet dabei die Menge der auf Ω_T oberhalbstetigen („upper semi-continuous “) Funktionen, bzw. $LSC(\overline{\Omega}_T)$, der auf Ω_T unterhalbstetigen („lower semi-continuous “) Funktionen.

Bemerkung 2.3.7. *Für den nicht-stetigen aber beschränkten Fall kann die obere Defintion angepasst werden, in dem bei der Bedingung für die Viskositäts-Unterlösung anstatt u die obere halbstetige Einhüllende $u^*(t,x) := \limsup_{(t_y,x_y)\to(t,x)} u(t_y,x_y), (t,x) \in \Omega_T$ und für die Viskositäts-Oberlösung die untere halbstetige Einhüllende $u_*(t,x) := \liminf_{(t_y,x_y)\to(t,x)} u(t_y,x_y), (t,x) \in \Omega_T$ betrachtet wird.*

Theorem 2.3.8. *[19, S.30] Sei $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{(2,1)}(\Omega)$. Dann ist u eine Viskositätslösung von* (2.16) *genau dann wenn u eine klassische punktweite Lösung von* (2.16) *ist.* □

Die Viskositätslösung muss ohne weitere Voraussetzungen nicht eindeutig sein, siehe die Eikonal-Gleichung.

Beispiel 2.3.9. *Betrachte man beispielsweise die gewöhnliche Differenzialgleichung*

$$(\partial_x u)^2 - 1 = 0, \text{ für } x \in (-1, 1).$$

Dann hat diese unter anderem die punktweise f.ü. Lösung $u(x) = 1 - |x|$*. Wir wollen nun zeigen, dass* u *eine Viskositätslösung der Gleichung ist.*

Beweis. Da u nur nicht-differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$ ist, reicht es nur diesen Punkt zu untersuchen.

1. Sei $\varphi \in C^1(-1, 1)$, sodass $\varphi - u$ ein lokales Minimum an der Stelle x_0 hat. O.B.d.A ist $\varphi(x_0) = u(x_0)$ und für $h > 0$ klein genug ist $\varphi(x_0 + h) \geq u(x_0 + h)$ und $\varphi(x_0 - h) \leq u(x_0 - h)$. Es gilt $\frac{1}{h}(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)) = \frac{1}{h}(\varphi(x_0 + h) - u(x_0)) \geq \frac{1}{h}(u(x_0 + h) - u(x_0)) = \frac{1}{h}(-h) = -1$ und analog $\frac{1}{h}(\varphi(x_0) - \varphi(x_0 - h)) \leq \frac{1}{h}(h) = 1. \Rightarrow |(\partial_x u)| \leq 1 \Rightarrow (\partial_x u)^2 - 1 \leq 0.$
2. Andererseits führt $\varphi \in C^1(-1, 1)$ mit $\varphi - u$ lokales Maximum an der Stelle x_0 zu einem Widerspruch.

□

2.3.3 Vergleichsprinzip

Es könnten mehrere Viskositätslösungen existieren, die nichts mit dem Optimalsteuerungsproblem zu tun haben. Um dies auszuschließen, benötigen wir ein Eindeutigkeitsresultat. Dieses wird als Vergleichsprinzip bezeichnet, in dem Unter- und Oberlösungen verglichen werden.

Um die Eindeutigkeit zu bekommen, betrachten wir (2.16) mit Randbedingung.

$$-\partial_t u + F[u] = 0 \text{ in } \Omega_T, \tag{2.21a}$$

$$u = g \text{ auf } \partial^* \Omega_T, \tag{2.21b}$$

mit $F[u](t, x) = F(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x), D^2 u(t, x))$ für $(t, x) \in \Omega_T$ und $g \in C(\partial^* \Omega_T)$.

Definition 2.3.10.

1. *Eine Funktion* $u \in USC(\overline{\Omega}_T)$ *ist eine Viskositäts-Unterlösung von* (2.21)*, falls* u *eine Viskositäts-Unterlösung von* (2.21a) *nach Definition* $2.3.6$ *ist und falls* $u \leq g$ *auf* $\partial^* \Omega_T$*.*
2. *Eine Funktion* $u \in LSC(\overline{\Omega}_T)$ *ist eine Viskositäts-Oberlösung von* (2.21)*, falls* u *eine Viskositäts-Oberlösung von* (2.21a) *nach Definition* $2.3.6$ *ist und falls* $u \geq g$ *auf* $\partial^* \Omega_T$*.*

Eine Funktion $u \in C(\Omega_T)$ *heißt von* (2.21)*, falls* u *sowohl eine Viskositäts-Unterlösung als auch eine Viskositäts-Oberlösung von* (2.21) *ist.*

Folgendes Theorem garantiert, dass das Maximum auf dem Rand angenommen wird. Darauf aufbauend wird in Korollar $2.3.12$ gezeigt, dass die Viskositätslösung eindeutig ist.

Theorem 2.3.11 (Vergleichsprinzip)**.** *[14] Angenommen die Voraussetzungen* $2.1.4$ *und* $2.1.8$ *gelten. Falls* $\underline{v} \in USC(\overline{\Omega}_T)$ *eine Viskositäts-Unterlösung und* $\overline{v} \in LSC(\overline{\Omega}_T)$ *eine Viskositäts-Oberlösung der Gleichung* (2.21) *ist, dann gilt*

$$\sup_{(0,T]\times\overline{\Omega}} [\underline{v} - \overline{v}] = \sup_{\partial^*\Omega_T} [\underline{v} - \overline{v}].$$

□

Korollar 2.3.12 (Eindeutigkeit)**.** *Angenommen es gelten die Voraussetzungen* $2.1.4$ *und* $2.1.8$*, dann existiert für die HJB Gleichung* (2.11) *mit Randbedingung* (2.9b) *höchstens eine Viskositätslösung.*

Beweis. Seien u und v beides Viskositätslösungen. Dann gilt nach Definition $2.3.10$, dass $u, v \leq g$ und $u, v \geq g$ auf $\partial^*\Omega_T \Rightarrow u = g = v$ auf $\partial^*\Omega_T$. Da u und v sowohl Viskositäts-Unterlösungen als auch Viskositäts-Oberlösungen sind, gilt mit Theorem $2.3.11$, dass $u - v \leq g - g = 0$ ist in $(0,T] \times \overline{\Omega}$ und analog $v - u \leq 0$ in $(0,T] \times \overline{\Omega}$. Also gilt $u = v$ in $(0,T] \times \overline{\Omega}$. Da beide Funktionen in $C(\overline{\Omega}_T)$ liegen, kann die Gleichheit auf $\overline{\Omega}_T$ erweitert werden.

□

2.4 Die Viskositätslösung der HJB Gleichung

Um dieses Kapitel abzuschließen, stellen wir die Verbindung zwischen der HJB Gleichung eines Optimalsteuerungsproblems und der Viskositätslösung her. Nämlich, dass die Wertfunktion aus Definition 2.8 eine Viskositätslösung der HJB Gleichung $2.2.1$ ist.

Lemma 2.4.1. *[14, Seite 201] Es gelten die Voraussetzungen* $2.2.3$*. Für jedes* $\epsilon > 0$ *mit* $\epsilon + t < T$ *und* $\bar{t} = \min\{\tau, t+\epsilon\}$ *gilt*

$$u(t,x) = \inf_{q(\cdot)\in\mathcal{A}} \Big\{ \mathbb{E}^{t,x}\Big[\int_t^{\bar{t}} f^{q_s}(s, X_s) ds \Big] + g(\bar{t}, X_{\bar{t}}) \cdot \mathbb{1}_{(\tau<t+\epsilon)} + u(\bar{t}, X_{\bar{t}}) \cdot \mathbb{1}_{(\tau\geq t+\epsilon)} \Big\}. \tag{2.22}$$

□

Theorem 2.4.2. *[14, Seite 209] Wir nehmen ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem wie in Abschnitt 2.1 an. Angenommen für die Wertfunktion aus Definition* 2.8 *gilt* $u \in C(\overline{\Omega}_T)$*,* $u = g$ *in* $\partial^*\Omega_T$*. Des Weiteren gilt mit Lemma* $2.4.1$ *das Prinzip der Dynamischen Programmierung.*
Dann ist u *eine Viskositätslösung nach Definition* $2.3.6$ *von*

$$-\partial_t u(t,x) + \sup_{q\in Q}\{-L^q u(t,x) - f^q(t,x)\} = 0 \text{ in } \Omega_T \tag{2.23a}$$

$$u = g \text{ in } \partial^*\Omega_T, \tag{2.23b}$$

wobei L *wie in* (2.10a) *definiert ist.*

Beweis. Siehe von Wendell H. Fleming und H. Mete Soner [14] Seite 209. □

Dies zeigt, dass die Wertfunktion eine Viskositätslösung der HJB Gleichung ist. Der Fall, dass nicht weitere Viskositätslösungen existieren, die mit unserem Optimalsteuerungsproblem nichts zu tun haben, wird durch das Theorem $2.3.12$ ausgeschlossen.

In diesem Kapitel haben wir verschiedene Aussagen erhalten. Mit Theorem $2.1.5$ ist der Prozess des Zustandsvektors wohldefiniert. Damit ist die Wertfunktion u wohldefiniert und nach Theorem $2.2.4$ gleichmässig stetig. Die Wertfunktion u löst die

HJB Gleichung, welche aus dem stochastischen Optimalsteuerungsproblem hervor geht. Nach Theorem $2.4.2$ ist die Wertfunktion eine Viskositätslösung der HJB Gleichung. Nach Korollar $2.3.12$ hat die HJB Gleichung nur eine Viskositätslösung. Durch Dynamische Programmierung lässt sich dann die optimale Steuerung $q^*(\cdot)$ finden.

3 Die HJB Gleichung für den Intraday-Handel

Zur besseren Analyse und mit dem Ziel der Optimierung, soll der Intraday-Handel auf dem Strommarkt mathematisch durch ein stochastisches Modell möglichst realitätsnah beschrieben werden. Betrachtet man eine Agentin, die ihren Gewinn durch den Handel von Energie auf dem Intraday-Strommarkt maximieren will, ergibt sich ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem. Das Ziel ist dann, durch die Lösung dieses Optimalsteuerungsproblems, eine optimale Handelsstrategie der Agentin zu finden.

Das in [1] betrachtete Modell konnte dabei analytisch gelöst werden, indem eine Formel für die Wertfunktion der aus dem Optimalsteuerungsproblem entstandenen HJB Gleichung gefunden wurde. Jedoch sind manche Modellannahmen in [1] in echten Marktszenarien nicht befriedigt. Unter anderem wurde dort keine Geld-Brief-Spanne betrachtet, der temporäre und der permanente Preis-Einfluss wurden linear angenommen und die Produktionskosten für konventionelle Energie zum Endzeitpunkt wurden vereinfacht als quadratisch angenommen.

In diesem Kapitel betrachten wir das Modell aus [15], welches als eine Erweiterung von [1] gesehen werden kann. Dieses Modell verwendet aus Marktdaten approximierte Funktionen, welche das Problem realistischer machen, aber mit dem Nachteil, dass es nicht analytisch lösbar ist. Deswegen suchen wir nicht nach der glatten Lösung, sondern nach der Viskositätslösung der HJB Gleichung. Des Weiteren ist der Endwert selbst ein Optimierungsproblem, welches nicht explizit durch eine Formel wie in [1] gelöst werden kann.

Wie bereits in Kapitel 2 beschrieben, ist unter gewissen Voraussetzungen die Viskositätslösung der HJB Gleichung gleich der Wertfunktion. Die Theorie aus Kapitel

2 garantiert uns dabei die Existenz einer gleichmäßig stetigen Lösung der HJB Gleichung. Im nächsten Kapitel wird dann beschrieben, wie mit numerischen Methoden die HJB Gleichung approximiert und eine approximierte Lösung der Wertfunktion gefunden werden kann.

In Abschnitt 3.1 wird das mathematische Modell mit der stochastischen Dynamik des Marktes beschrieben. In Abschnitt 3.2 wird das Optimierungsproblem des Endwertes eingeführt. In Abschnitt 3.3 geben wir die HJB Gleichung, die aus dem stochastischen Modell für den stetigen Intraday-Handel hervorgeht und überprüfen ob die Voraussetzungen aus Kapitel 2 hier gelten, sodass die darauf basierenden Theoreme verwendet werden können.

Wir nehmen an, eine Agentin handelt am Intraday-Strommarkt und verfügt über ein Portfolio aus erneuerbaren und konventionellen Energien. Erst verkauft sie am Day-Ahead Markt eine Menge Strom und startet anschließend mit dieser negativen Handelsposition den stetigen Intraday-Stromhandel. In [15] wurde angenommen, dass die erneuerbare Energie aus Windkraftanlagen gewonnen wird. Die Agentin handelt dabei nur mit einer prognostizierten Stromerzeugung aus Erneuerbaren für ihre Windenergie, da die tatsächliche Menge bis zum Ende des Handelstages unsicher ist. Falls nötig, hat sie zum Endzeitpunkt noch die Möglichkeit konventionelle Energie zu produzieren.

Ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem ergibt sich dadurch, dass die Steuerung die Veränderung der Handelsposition zu jedem Zeitpunkt ist, die laufenden Kosten f der Preis verrechnet mit dieser Veränderung ist und die finalen Kosten g die Produktionskosten für konventionelle Energie plus einem Strafterm für nicht befriedigte Nachfrage, bzw. nicht verkauftes Angebot, ist. Diese Kosten sollen dann durch eine optimale Handelsstrategie minimiert werden, was äquivalent als Maximierung von Gewinn, wie in [15], interpretiert werden kann.

Das Modell in [15] ist in einem Projekt als Kooperation des Lehrstuhls für Energiehandel und Finanzdienstleistungen der Universität Duisburg-Essen, dem Lehrstuhl für Energiewirtschaft der Universität Duisburg-Essen und dem Institut für Numerische Mathematik der Universität Ulm entstanden.

3.1 Intraday-Handel mit erneuerbaren Energien

Abhängig von der Wettervorhersage und dem erwarteten Preis zum Endzeitpunkt, verkauft die Agentin eine Kombination aus erneuerbarer und konventioneller Energie an dem Day-Ahead Markt. Dies bildet dann den Startwert für die Handelsposition im Intraday-Handel. Die Agentin startet dann den stetigen Intraday-Handel, wobei sie ihren Profit durch eine optimale Handelsstrategie maximieren will, bzw. Kosten minimieren.

3.1.1 Day-Ahead mit stetigem Intraday-Handel

Wie in [15] beschrieben, endet am Vortag die Day-Ahead Auktion um 12:00 Uhr. In dieser Auktion kann jeder Teilnehmer eine Menge an erneuerbarer Energie zu einem bestimmten Preis fordern („ask“) oder anfragen („bid“). Anschließend wird ein markträumender Preis festgesetzt zu dem gehandelt wird. Nach 3 Stunden, um 15:00 Uhr, startet dann der stetige Intraday-Handel und endet am nächsten Tag 30 Minuten vor einer bestimmten Lieferstunde („delivery hour“).

In diesem Modell wird im Intervall $(0, T)$ stetig gehandelt, wobei $t = 0$ der Startzeitpunkt und T das Ende der Handelsperiode ist, also 30 Minuten vor der Lieferstunde.

3.1.2 Dynamik des Strommarktes

Die Dynamik des Marktes ist durch eine prognostizierte Stromerzeugung aus Erneuerbaren D zum Zeitpunkt T und durch einen Preis Y gegeben. Der Preis wird dabei von der Handelsaktivität der Agentin beeinflusst. Beschrieben werden diese durch stochastische Prozesse, welche aus SDGln hervorgehen (siehe Kapitel 2).

Sei $D = \{D_t\}_{0 \leq t \leq T}$ die **prognostizierte Stromerzeugung** aus Erneuerbaren für die produzierte erneuerbare Energie zum Zeitpunkt T. Die Dynamik hierfür ist

$$dD_t = \mu_D dt + \sigma_D dW_{t,D}, \qquad D_0 = d_0,$$

wobei $\mu_D \in \mathbb{R}$ der Drift, $\sigma_D \geq 0$ die Volatilität, $d_0 \geq 0$ der Startwert und $\{W_{t,D}\}_{0\leq t\leq T}$ ein Wiener-Prozess ist. Es sei angemerkt, dass in diesem Modell D nicht beschränkt ist. In der realen Welt gibt es allerdings Schranken, denn D kann nicht kleiner als 0 sein und die Kapazität des Windparks beschränkt D nach oben. Diese Schranken können mit einer geringen Wahrscheinlichkeit in diesem mathematischen Modell überschritten werden.

Die **Handelsposition** $X = \{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ beschreibt die Handelsaktivität der Agentin. Speziell handelt die Agentin zum Zeitpunkt t mit $q_t \in Q \subset \mathbb{R}$, wobei $q_t > 0$ für einen Kauf von Energie und $q_t < 0$ für einen Verkauf steht. Die Dynamik ist dann

$$dX_t = q_t dt, \qquad X_0 = x_0, \tag{3.1}$$

wobei x_0 die Strommenge ist, die am Day-Ahead Markt verkauft wurde, d.h. $x_0 < 0$. Mit $X^{\bar{t},x,q} = \{X_t^{\bar{t},x,q}\}_{\bar{t}\leq t\leq T}$, bezeichnen wir den Prozess (3.1), der in $\bar{t}$ mit $X_{\bar{t}} = x$ und $dX_{\bar{t}} = qdt$ startet.

Im Folgenden betrachten wir mit einen Prozess $Z = \{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$, der $D = \{D_t\}_{0\leq t\leq T}$ und $X = \{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ zusammenfasst. Die Dynamik von Z ist

$$dZ_t = (\mu_D + q_t)dt + \sigma_D dW_{t,D}, \qquad z_0 = d_0 + x_0. \tag{3.2}$$

Das ist bei uns möglich, weil $\{D_t\}_{0\leq t\leq T}$ nicht von der Steuerung abhängt, $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ keine Diffusion hat, wir Markov-Steuerungen haben und der Endwert auch nur von D_T und X_T als Summe abhängt. Das Optimalsteuerungsproblem bleibt das Gleiche und die Wertfunktion u ändert sich nicht. Mit $Z^{\bar{t},z,q} = \{Z_t^{\bar{t},z,q}\}_{\bar{t}\leq t\leq T}$, bezeichnen wir den Prozess (3.2), der in $\bar{t}$ mit $Z_{\bar{t}} = z$ und $dZ_{\bar{t}} = qdt$ startet.

Der **Unbeeinflusste Preis** $Y = \{Y_t\}_{0\leq t\leq T}$ hat wieder einen festen Drift $\mu_Y \in \mathbb{R}$ und eine Volatilität $\sigma_Y \geq 0$. Außerdem wird Y durch den dauerhaften Preis-Einfluss („permanent price-impact “) $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welcher von q_t abhängt, beeinflusst. Die Dynamik für Y ist dann

$$dY_t = (\mu_Y + \psi(q_t))dt + \sigma_Y dW_{t,Y}, \qquad Y_0 = y_0, \tag{3.3}$$

mit einem Startwert $y_0 \in \mathbb{R}$ und einem Wiener-Prozess $\{W_{t,Y}\}_{0\leq t\leq T}$. Mit $Y^{\bar{t},y} =$

$\{Y_t^{\bar{t},y}\}_{\bar{t}\leq t\leq T}$ bezeichnen wir den Prozess (3.3), der in $\bar{t}$ mit $Y_{\bar{t}} = y$ startet.

Der tatsächliche **Ausführungspreis** P setzt sich zusammen aus dem unbeeinflussten Preis Y, dem positiv oder negativ einfliessenden Spread $h : [0,T] \to \mathbb{R}_0^+$ und dem temporären Preis-Einfluss („temporary price-impact “) $\varphi : [0,T] \times Q \to \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $P^{\bar{t},q,y} = \{P_t^{\bar{t},q,y}\}_{\bar{t}\leq t\leq T}$ Prozesse, die mit $P_{\bar{t}} = y + \frac{|q|}{q}h(\bar{t}) + \varphi(\bar{t},q)$ starten und die Form

$$P_s = Y_s + \frac{|q_s|}{q_s}h(s) + \varphi(s,q_s) \tag{3.4}$$

haben. Vorerst sei $Q = \mathbb{R}$, allerdings brauchen wir später für die numerische Auswertung Schranken für Q.

Zum besseren Verständnis folgen ein paar Erläuterungen zu den verwendeten stetigen Funktionen $h(\cdot), \psi(\cdot)$ und $\varphi(\cdot,\cdot)$. Der Spread $h(\cdot)$, auch als Geld-Brief-Spanne bezeichnet wird, spiegelt die Gewinnspanne der Marktteilnehmer wider. Sie verkaufen aus ihrer Sicht zum höheren Briefkurs („ask“) und kaufen zum niedrigeren Geldkurs („bid“). Der dauerhafte Preis-Einfluss $\psi(\cdot)$ kommt vor allem bei Marktteilnehmern mit einem großen Markteinfluss zum Tragen. Der temporäre Preis-Einfluss $\varphi(\cdot,\cdot)$ kommt vor allem zum Tragen, wenn von der Agentin in einem Zeitpunkt t eine große Menge an Strom gekauft oder verkauft wurde.

3.1.3 Wertfunktion

Auf dem Intraday-Strommarkt kann vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt T gehandelt werden. Die Agentin handelt so, dass die laufenden Kosten f von 0 bis T plus die finalen Kosten g für ein $\xi \geq 0$ zum Endzeitpunkt minimal sind. Was zuerst gesucht wird ist der Wert der **Wertfunktion**

$$\inf_{(q(\cdot),\xi)\in\mathcal{A}\times\mathbb{R}_0^+} \mathbb{E}\Big[\int_0^T (q_s \cdot P_s)ds + g(\xi; Y_T, Z_T)\Big], \tag{3.5}$$

zum Zeitpunkt 0, weil zum Start der Handelsperiode die optimale Handelsstrategie berechnet werden soll. Hierbei ist, wie in Kapitel 2, $\mathcal{A}$ die Menge der zulässigen Steuerungen mit Werten in Q. Zu einem späteren Zeitpunkt $t \in (0,T)$ können die Prozesse auf aktuelle bekannte Werte angepasst werden, d.h. $Y_t = y, Z_t = z$, und

mit diesem Mehrwissen wird wieder neu optimiert, d.h. es wird $u(t; y, z)$ gesucht.

In dieser Arbeit gehen wir von einem Minimierungsproblem aus, d.h. die Agentin will Kosten minimieren. Das ist allerdings äquivalent zu dem Problem aus [15], in dem die Agentin ihren Gewinn maximieren will. Sei V die Wertfunktion aus [15], dann betrachten wir hier stattdessen $u := -V$, d.h.

$$u(t; y, z) = \inf_{q(\cdot)\in\mathcal{A}} \mathbb{E}^{t;y,z}\Big[\int_t^T (q_s \cdot P_s^{q,t,y})ds + g_1(Y_T, Z_T)\Big] \tag{3.6a}$$

$$= -V(t; y, z) = -\sup_{(q(\cdot),\xi)\in\mathcal{A}\times\mathbb{R}_0^+} \mathbb{E}^{t;y,z}\Big[-\int_t^T f^{q_s}(s; y, z)ds - g(\xi; Y_T, Z_T)\Big], \tag{3.6b}$$

für $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ mit $\xi^* := \arg\min_{\xi\in\mathbb{R}_0^+} g(\xi; Y_T, Z_T)$ und $g_1(Y_T, Z_T) := g(\xi^*; Y_T, Z_T)$. Es sei angemerkt, dass der Term (3.6b) zwei Optimierungsprobleme beinhaltet, die aber, wie in (3.6a), separiert werden können.

3.2 Konventionelle Produktion für den Endwert

Zum Endzeitpunkt T des Handelstages entscheidet die Agentin wie viel Strom $\xi \in \mathbb{R}_0^+$ aus konventioneller Energie produziert werden soll. Die **Produktionskosten** hierfür sind durch eine Kostenfunktion $c : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben.

Die Menge an Strom der Agentin zum Zeitpunkt T ist dann $Z_T + \xi = D_T + X_T + \xi$, d.h. die Summe aus dem Angebot an erneuerbarer Energie D_T aus ihren Windkraftanlagen, der gehandelten Energie X_T und der produzierten konventionellen Energie ξ.

Zusätzlich zu den Produktionskosten $c(\xi)$ fließt in die finalen Kosten noch ein Kostenterm für alle Werte $(D_T + X_T + \xi) \neq 0$ ein, denn falls diese größer Null sind, muss Strom verkauft werden, bzw. falls kleiner Null, gekauft werden. Aus diesem Grund kann $-D_t$ auch als prognostizierte Nachfrage für den Endzeitpunkt interpretiert werden, die befriedigt werden soll.

Speziell wird die Menge zum Zeitpunkt T multipliziert mit dem Ausführungspreis

$$Y_T - \big(h(T) + \alpha(Z_T + \xi)\big)\frac{|Z_T + \xi|}{Z_T + \xi}.$$

Der Strafterm $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ gibt dabei zusammen mit dem Spread $h(T)$ das Marktangebot wieder. Je mehr Strom zum Zeitpunkt T verkauft oder gekauft werden muss, desto eher muss ein Kompromiss beim Preis eingegangen werden.

Der Endwert ist dann $g_1(Y_T, Z_T) = g_1(Y_T, D_T, X_T) =$

$$c(\xi^*) - (D_T + X_T + \xi^*)\Big(Y_T - \big(h(T) + \alpha(D_T + X_T + \xi)\big)\frac{|D_T + X_T + \xi^*|}{D_T + X_T + \xi^*}\Big),$$

wobei $\xi^* \in \mathbb{R}_0^+$ die optimale konventionelle Produktion ist. Also beinhaltet die Randbedingung (3.10) selbst ein Optimierungsproblem, was separat von (3.6a) betrachtet werden kann. Um dies zu lösen muss für gegebene Werte D_T, X_T, Y_T,

$$\xi^* := \arg\min_{\xi \in \mathbb{R}_0^+} \left\{ c(\xi) - (D_T + X_T + \xi)\Big(Y_T - \big(h(T) + \alpha(D_T + X_T + \xi)\big)\frac{|D_T + X_T + \xi^*|}{D_T + X_T + \xi^*}\Big) \right\} \tag{3.7}$$

bestimmt und dann in $g(\xi; Y_T, D_T, X_T)$ eingesetzt werden.

In Kapitel 5 wird die Wohldefiniertheit für das Optimierungsproblem (3.7) bewiesen und $g_1(\cdot)$ für eine bestimmte Kostenfunktion $c(\cdot)$ mit Beispielwerten errechnet.

3.3 Die HJB Gleichung für den Intraday-Handel

In diesem Kapitel stellen wir die Verbindung zu Kapitel 2 her. Erst definieren wir die HJB Gleichung und geben an wie der Drift, die Volatilität und die Kostenfunktionen hier gegeben sind. Anschließend werden dann die Voraussetzungen $2.1.4$, $2.1.8$ und $2.2.3$ überprüft.

3.3.1 HJB Gleichung

Wie in Kapitel 2, hat die HJB Gleichung (2.9) die Form

$$\partial_t u + \inf_{q\in Q}\Big\{\mathsf{Tr}\Big[\frac{1}{2}(\sigma^q)^\top \sigma^q D^2 u\Big] + \mu^q \nabla u + f^q\Big\} = 0 \text{ in } \Omega_T,$$
$$u(T,\cdot) = g_1(\cdot) \text{ in } \Omega,$$
$$u(\cdot,Y,Z) = g_2(\cdot,Y,Z) \text{ in } (0,T), \text{ für } (Y,Z)\in\partial\Omega,$$

Aus dem Modell ergeben sich hiermit folgende Funktionen

$$\mu^q(t,Y,Z) = \mu^q = (\mu_Y + \psi(q), \mu_D + q) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.8a}$$
$$f^q(t,Y,Z) = f^q(t,Y) = \Big(Y + \frac{q}{|q|}h(t) + \varphi(t,q)\Big)\cdot q \in \mathbb{R}, \tag{3.8b}$$
$$\sigma^q(t,Y,Z) = \sigma = \begin{pmatrix}\sigma_Y & 0\\ 0 & \sigma_D\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \tag{3.8c}$$

zum Zeitpunkt $t\in(0,T)$ im Zustand $(Y,Z)\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Dann erhalten wir die HJB Gleichung

$$\partial_t u + \mu_Y\partial_Y u + \mu_D\partial_Z u + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\partial_{YY}u + \frac{1}{2}\sigma_D^2\partial_{ZZ}u +$$
$$\inf_{q\in Q}\Big\{\Big(Y + \frac{q}{|q|}h(\cdot) + \varphi(\cdot,q)\Big)q + q\partial_Z u + \psi(q)\partial_Y u\Big\} = 0 \text{ in } \Omega_T, \tag{3.9}$$

mit dem Endwert

$$g_1(T,Y_T,Z_T) = c(\xi^*) - (Z_T+\xi^*)\Big(Y_T - \big(h(T) + \alpha(Z_T+\xi^*)\big)\frac{|Z_T+\xi^*|}{Z_T+\xi^*}\Big), \tag{3.10}$$

in $(Y_T,Z_T)\in\Omega$, wobei ξ^* für die optimale konventionelle Produktion zum Zeitpunkt T steht und $c(\cdot)$ die Kosten dieser Produktion sind. Die Randfunktion $g_2(\cdot):(0,T)\times\partial\Omega\to\mathbb{R}$ ist hier nicht gegeben, da Ω vorerst unbeschränkt ist. In der numerischen Anwendung wird Ω beschränkt, wodurch auch eine Randfunktion $g_2(\cdot)$ gebraucht wird.

Alternativ wie (2.11) gibt es auch die HJB Gleichung

$$-\partial_t u - \mu_Y \partial_Y u - \mu_D \partial_Z u - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \partial_{YY} u - \frac{1}{2}\sigma_D^2 \partial_{ZZ} u + \sup_{q \in Q} \Big\{ -\Big(Y + \frac{q}{|q|} h(\cdot) + \varphi(\cdot, q)\Big) q - q \partial_Z u - \psi(q) \partial_Y u \Big\} = 0 \text{ in } \Omega_T. \tag{3.11}$$

3.3.2 Überprüfung der Voraussetzungen

Um die Theoreme aus Kapitel 2 verwenden zu können, zeigen wir, dass die Voraussetzungen dafür erfüllt sind.

Lemma 3.3.1. *Für die Funktionen* $\mu^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : Q \times [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (3.8a) *und* $\sigma^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : Q \times [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ (3.8c) *gilt Voraussetzung* $2.1.4$*.*

Beweis. Der Drift $\mu^q(\cdot) = (\mu_Y + \psi(q), \mu_D + q)$ ist in Q stetig, da $\psi(q)$ in Q stetig ist. Die Diffusion $\sigma^{(\cdot)}(\cdot) = \begin{pmatrix} \sigma_Y & 0 \\ 0 & \sigma_D \end{pmatrix}$ ist eine konstante Matrix und damit auch stetig. Somit gilt Voraussetzung $2.1.4$ (i).
Für ein festes $q \in Q$, sind $\sigma^q(\cdot)$ und $\mu^q(\cdot)$ konstant, womit auch Voraussetzung $2.1.4$ (ii) und (iii) gilt. □

Des Weiteren sind die Steuerungen $q(\cdot)$ in unserem Fall Markov-Steuerungen, womit Theorem $2.1.5$ gilt. Sei von jetzt an angenommen, dass Q kompakt ist. Wir überprüfen die Voraussetzungen $2.1.8$.

Lemma 3.3.2. *Für die Funktionen* $f^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : Q \times [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ (3.8b) *und* $g_1 : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ (3.10) *gilt Voraussetzung* $2.1.8$*.*

Beweis. Die Kostenfunktion $f^{(\cdot)}(\cdot)$ ist stetig, da $h(\cdot)$ und $\varphi(\cdot,\cdot)$ stetig sind. Die Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ist wegen $c(\cdot)$ nur stückweise stetig. Allerdings ist $g(\xi;\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig für alle $\xi \in \mathbb{R}_0^+$, da $\alpha(\cdot)$ stetig ist. Wir nehmen an, dass der Grenzwert $\inf_{\xi \in \mathbb{R}_0^+} g(\xi; Y, Z)$ für alle $(Y,Z) \in \Omega$ exisitert, siehe dafür Kapitel 5. Damit gilt nach dem Satz über das Vertauschen von Grenzwerten, dass für alle

$(Y, Z) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(Y_k,Z_k)\to(Y,Z)\\ \text{für } k\to\infty}} g_1(Y_k, Z_k) &= \lim_{\substack{(Y_k,Z_k)\to(Y,Z)\\ \text{für } k\to\infty}} \inf_{\xi\in\mathbb{R}_0^+} g(\xi; Y_k, Z_k)\\ &= \inf_{\xi\in\mathbb{R}_0^+} \lim_{\substack{(Y_k,Z_k)\to(Y,Z)\\ \text{für } k\to\infty}} g(\xi; Y_k, Z_k)\\ &= \inf_{\xi\in\mathbb{R}_0^+} g(\xi; Y, Z) = g_1(Y, Z),\end{aligned}$$

d.h. auch $g_1(\cdot)$ ist stetig. Somit gilt Voraussetzung $2.1.8\ (i)$.
Für alle $q \in Q, (Y, Z) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned}&|f^q(t_1, Y_1, Z_1) - f^q(t_2, Y_2, Z_2)|\\ =&|\big(Y_1 + \frac{q}{|q|}h(t_1) + \varphi(t_1, q)\big) \cdot q - \big(Y_2 + \frac{q}{|q|}h(t_2) + \varphi(t_2, q)\big) \cdot q|\\ \leq&|Y_1 - Y_2| \cdot |q_{max}| + |q_{max}| \cdot |h(t_1) - h(t_2)| + |\varphi(t_1, q) - \varphi(t_2, q)| \cdot |q_{max}|\\ \leq&|q_{max}| \cdot (|Y_1 - Y_2| + L_h|t_1 - t_2| + L_\varphi|t_1 - t_2|)\\ \leq&|q_{max}| \cdot \max\{1, L_h + L_\varphi\} \cdot (|Y_1 - Y_2| + |t_1 - t_2|)\\ \leq&|q_{max}| \cdot \max\{1, L_h + L_\varphi\} \cdot (|\begin{pmatrix}Y_1\\ Z_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}Y_2\\ Z_2\end{pmatrix}| + |t_1 - t_2|),\end{aligned}$$

mit $q_{max} = \arg\max\{|q| : q \in Q\}$. Die Funktionen $h(\cdot)$ und $\varphi(\cdot, \cdot)$ sind Polynome und damit auf dem beschränkten Intervall $[0, T]$ Lipschitz-stetig. Außerdem ist

$$\begin{aligned}&|f^q(t_1, Y_1, Z_1)| = |\big(Y_1 + \frac{q}{|q|}h(t_1) + \varphi(t_1, q)\big) \cdot q|\\ \leq&|Y_1| \cdot |q| + M_h \cdot |q| + M_\varphi \cdot |q|\\ \leq&|q_{max}| \cdot \max\{1, M_h + M_\varphi\} \cdot (1 + |\begin{pmatrix}Y_1\\ Z_1\end{pmatrix}|),\end{aligned}$$

wobei M_h und M_φ existieren, da $[0, T]$ und Q beschränkt sind und $h(\cdot)$, $\varphi(\cdot, \cdot)$ Polynome. Der Endwert $g_1(\cdot)$ ist, falls Ω beschränkt ist, beschränkt, da zum einen

$$g_1(Y, Z) \leq g(0; Y, Z) \leq \max_{(y,z)\in\Omega} g(0; y, z) < \infty$$

und zum anderen ist

$$g_1(Y_T, Z_T) \geq -(\max\{|Z_{max}|, |Z_{min}|\} + \xi_{max}) \cdot \max\{|Y_{max}|, |Y_{min}|\}.$$

Damit gilt auch Voraussetzung $2.1.8\ (ii)$. □

Jetzt überprüfen wir noch die Voraussetzung $2.2.4$. Diese gilt ohnehin wenn Ω unbeschränkt ist, d.h. $\Omega = \mathbb{R}^2$. Allerdings werden wir für die numerische Anwendung annehmen, dass $\Omega \approx [Y_{min}, Y_{max}] \times [Z_{min}, Z_{max}]$ mit $Y_{min}, Y_{max}, Z_{min}, Z_{max} \notin \Omega$. In diesem Fall ist

$$\rho(Y, Z) = -\min\{|Y_{max} - Y|, |Y_{min} - Y|, |Z_{max} - Y|, |Z_{min} - Y|\},$$

für $(Y, Z) \in \Omega$, und

$$\rho(Y, Z) = \min\{|Y_{max} - Y|, |Y_{min} - Y|, |Z_{max} - Y|, |Z_{min} - Y|\},$$

für $(Y, Z) \notin \Omega$.

Lemma 3.3.3. *Voraussetzung* $2.2.3$ *gilt.*

Beweis. Betrachte dafür, dass $\nabla\rho(Y, Z) = (0, 1)$, falls $Z = Z_{min}$, $\nabla\rho(Y, Z) = (0, -1)$, falls $Z = Z_{max}$, $\nabla\rho(Y, Z) = (1, 0)$, falls $Y = Y_{min}$, $\nabla\rho(Y, Z) = (-1, 0)$, falls $Y = Y_{max}$. Außerdem ist $D^2\rho = 0$. Deswegen ist $L^q\rho = \mu\nabla\rho$. Nun lässt sich $q(\cdot) \in \mathcal{A}$ finden mit $q(t, Y_{max}, z) = 0$, $q(t, y, Z_{max}) = 0$, $\psi(q(t, Y_{min}, z)) < -\mu_Y$, $q(t, y, Z_{min}) < \mu_D$. Dann gilt $\mu\nabla\rho > 0$ auf dem Rand und somit gilt Bedingung (i). Wir wählen $\tilde{g} = (T - t) \cdot K_f + K_g$, mit

$$K_g := -(\{\max\{|Z_{max}|, |Z_{min}|\} + \xi_{max}) \cdot \max\{|Y_{max}|, |Y_{min}|\}$$

und

$$K_f := -|q_{max}| \cdot (\max\{|Y_{min}|, |Y_{max}|\} + M_h + M_\varphi)$$

Nun gilt

$$g_1(Y_T, Z_T) \geq K_g = \tilde{g}(T, Y_T, Z_T) \text{ für } (Y_T, Z_T) \in \Omega$$

und

$$-\partial_t \tilde{g} + \max_{q \in Q}\{-L^q \tilde{g} - f^q\} = K_f + \max_{q \in Q}\{-f^q\} \leq 0 \text{ in } \Omega_T.$$

□

Somit gilt Theorem $2.2.4$, d.h. die Wertfunktion ist gleichmäßig stetig und eine Viskositätslösung der HJB Gleichung.

3.4 Analytische Lösung der HJB Gleichung für Spezialfall

Zum Testen von numerischen Methoden, bietet es sich an diese Methoden auf eine verwandte PDGl anzuwenden, von welcher die analytische klassische Lösung bekannt ist.

Für den Spezialfall, dass wir keinen Spread und keinen dauerhaften Preis-Einfluss haben, konnten wir eine analytische Lösung für die HJB Gleichung finden.

Sei

$$h(t) = 0, \qquad \varphi(t,q) = k \cdot q \text{ mit } k > 0, \qquad \psi(q) = 0,$$

für $t \in (0,T), q \in Q$. Dann wird aus (3.11),

$$-\partial_t u - \mu_Y \partial_Y u - \mu_D \partial_Z u - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \partial_{YY} u - \frac{1}{2}\sigma_D^2 \partial_{ZZ} u + \max_{q \in Q}\Big\{ - Y \cdot q - k \cdot q^2 - q\partial_Z u \Big\} = 0 \text{ in } \Omega_T. \tag{3.12}$$

Dann wird das Extremum für

$$q^*(t,Y,Z) = \frac{Y + \partial_Z u(t,Y,Z)}{-2k}$$

angenommen, wobei es sich um ein Maximum handelt, da $2(-2k) < 0$ für $t \in (0,1)$.

Wir setzen $q^*(\cdot)$ in (3.13) ein und erhalten

$$-\partial_t u - \mu_Y \partial_Y u - \mu_D \partial_Z u - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \partial_{YY} u - \frac{1}{2}\sigma_D^2 \partial_{ZZ} u + \frac{(Y + \partial_Z u)^2}{4k} = 0. \tag{3.13}$$

Wie in [1] nehmen wir an, dass die Wertfunktion die Form

$$u(t, y, z) = A(t)z^2 + B(t)y^2 + F(t)zy + G(t)z + H(t)y + K(t) \tag{3.14}$$

hat, mit $A, B, F, G, H, K : (0, T) \to \mathbb{R}$. Fügen wir (3.14) in (3.13) ein erhalten wir

$$-\dot{A}(t)z^2 - \dot{B}(t)y^2 - \dot{F}(t)zy - \dot{G}(t)z - \dot{H}(t)y - \dot{K}(t) \tag{3.15}$$

$$-\mu_Y(2B(t)y + F(t)z + H(t)) - \mu_D(2A(t)z + F(t)y + G(t)) \tag{3.16}$$

$$-\sigma_Y^2 B(t) - \sigma_D^2 A(t) + \frac{(y + 2A(t)z + F(t)y + G(t))^2}{4k} = 0 \tag{3.17}$$

Dann erhalten wir ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}
-\dot{A}(t) + \frac{A^2(t)}{k} &= 0, \\
-\dot{B}(t) + \frac{(1 + F(t))^2}{4k} &= 0, \\
-\dot{F}(t) + \frac{(1 + F(t))(A(t))}{k} &= 0, \\
-\dot{G}(t) - \mu_Y F(t) - 2\mu_D A(t) + \frac{G(t)A(t)}{k} &= 0, \\
-\dot{H}(t) - 2\mu_Y B(t) - \mu_D F(t) + \frac{G(t)(1 + F(t)))}{2k} &= 0, \\
-\dot{K}(t) - \mu_Y H(t) - \mu_D G(t) - \sigma_Y^2 B(t) - \sigma_D^2 A(t) + \frac{G(t)^2}{4k} &= 0.
\end{aligned}$$

Mit

$$\mu_D = \mu_Y = 0$$

wird dieses Gleichungssystem gelöst von

$$
\begin{aligned}
A(t) &= \frac{-kA_0}{A_0t-k} && ,A(0) &&= A_0,\\
F(t) &= \frac{-A_0t-F_0k}{A_0t-k} && ,F(0) &&= F_0,\\
B(t) &= \frac{(4B_0A_0-(F_0+1)^2)t-4B_0k}{4A_0t-4k} && ,B(0) &&= B_0,\\
G(t) &= \frac{-kG_0}{A_0t-k} && ,G(0) &&= G_0,\\
H(t) &= \frac{-kG_0(F_0+1)}{2(A_0t-k)A_0}+H_0+\frac{-G_0(F_0+1)}{2A_0} && ,H(0) &&= H_0,\\
K(t) &= -\sigma_Y^2tB_0+\frac{\sigma_Y^2tF_0^2}{4A_0}+\frac{\sigma_Y^2tF_0}{2A_0}+\frac{\sigma_Y^2t}{4A_0}\\
&\quad -\frac{G_0^2k}{4A_0(A_0t-k)}+k\ln(A_0t-k)\sigma_D^2+\frac{k\ln(A_0t-k)F_0^2\sigma_Y^2}{4A_0^2}\\
&\quad +\frac{k\ln(A_0t-k)F_0\sigma_Y^2}{2A_0^2}+\frac{k\ln(A_0t-k)\sigma_Y^2}{4a^2}+K_0\\
&\quad -\frac{G_0^2}{4A_0}-k\ln(-k)\sigma_D^2-\frac{k\ln(-k)F_0^2\sigma_Y^2}{4A_0^2}\\
&\quad -\frac{k\ln(-k)F_0\sigma_Y^2}{2A_0^2}-\frac{k\ln(-k)\sigma_Y^2}{4A_0^2} && ,K(0) &&= K_0.
\end{aligned}
$$

Auf diese Funktion werden wir in Kapitel 6 numerische Methoden anwenden.

4 Numerische Methoden zum Lösen der HJB Gleichung

Mit numerischen Methoden klassische partielle Differenzialgleichungen höheren Grades zu lösen, ist bereits eine Herausforderung. Hier müssen die numerischen Lösungen allerdings gegen die nicht notwendigerweise glatte Viskositätslösung der HJB Gleichung konvergieren, was zusätzliche Bedingungen an das numerische Verfahren stellt.

In diesem Kapitel betrachten wir Voraussetzungen an abstrakte Approximationsschemas, aus welchen die Konvergenz gegen die Viskositätslösung folgt. Anschließend geben wir konkrete Finite-Differenzen-Methoden an, auf die sich diese Konvergenztheorie erfolgreich anwenden lässt.

In Abschnitt 4.1 wird die Barles-Souganidis Konvergenztheorie behandelt, wonach abstrakte Approximationsschemas bestimmte Monotonie-, Stabilitäts- und Konsistenzeigenschaften erfüllen müssen, um die Konvergenz gegen die Viskositätslösung gewährleisten zu können. In Abschnitt 4.2 wird Howard's Algorithmus eingeführt, welcher benutzt wird um die aus dem Approximationsschema entstandenen diskreten Gleichungssysteme iterativ zu lösen. In Abschnitt 4.3 werden dann zwei verschiedene Finite-Differenzen-Methoden vorgestellt, welche die geforderten Voraussetzungen erfüllen. Zum Abschluss geben wir noch zwei weitere existierende numerische Methoden zum Lösen von HJB Gleichungen.

Wie in Kapitel 2 erörtert, ist die eindeutige Viskositätslösung der HJB Gleichung eines Optimalsteuerungsproblems gleich der Wertfunktion. Theorem $4.1.5$ garantiert die Konvergenz gegen die Viskositätslösung, wodurch das Optimalsteuerungsproblem gelöst wird.

Hauptquellen in diesem Kapitel sind [2], [3], [21] und [19].

4.1 Die Barles-Souganidis Konvergenztheorie

Guy Barles und Panagiotis E. Souganidis konnten in [2] für eine breite Klasse von Approximationsschemas die Konvergenz der diskreten Lösungsfunktion dieser Schemas gegen die Lösungsfunktion der zugehörigen, voll nichtlinearen degeneriert elliptischen oder degeneriert parabolischen PDGl zweiter Ordnung zeigen. Sie konnten dabei zeigen (vgl. Theorem $4.1.5$), dass jedes monotone (vgl. Definition $4.1.1$), stabile (vgl. Definition $4.1.2$) und konsistente (vgl. Definition $4.1.4$) Approximationsschema gegen die eindeutige Viskositätslösung konvergiert, vorausgesetzt es existiert ein Vergleichsprinzip (vgl. Theorem $2.3.12$) für das Problem.

Sei $\Omega_T = (0,T) \times \Omega$ wieder die offene Zeit-Zustandsmenge und $\partial\Omega_T$ ihr Rand. Für die jeweilige Diskretisierung bezeichnen wir mit $G_h = G_h^+ \cup \partial G_h$ das Gitter, wobei $G_h^+ \subset \Omega_T$ das Gitter der inneren Diskretisierungspunkte ist und $\partial G_h \subset \partial\Omega_T$ die Gitterpunkte auf dem Rand, wobei $h > 0$ die Feinheit des Schemas angibt, i.e. mit kleiner werdendem h wird die Diskretisierung feiner. Für den Fall der Finiten-Differenzen ist $h = ||(\Delta t, \Delta x)||$, wobei Δt die Schrittweite in der Zeit und Δx im Zustand ist. Wir teilen die Gitterpunkte $G_h = G_{h,1} \times G_{h,2}$ auf in $G_{h,1} \subset (0,T)$, die Gitterpunkte in der Zeit, und $G_{h,2} \subset \Omega$, die Gitterpunkte im Zustand.

Sei für ein $h > 0$,

$$S_h : G_{h,1} \times G_{h,2} \times \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

ein Approximationsoperator mit Feinheit h. Wie in Kapitel 2 ist die Randfunktion $g : \partial^*\Omega_T \to \mathbb{R}$ gegeben. Nun wird nach einer diskreten Lösungsfunktion $u_h : G_h \cup \partial G_h \to \mathbb{R}$ der abstrakten Gleichung (4.2) mit Randbedingung gesucht.

$$S_h(t,x,u_h(t,x),[u_h]_{t,x}) = 0, \qquad \text{für} \quad (t,x) \in G_h, \tag{4.2a}$$

$$u_h(t,x) = g(t,x), \qquad \text{für} \quad (t,x) \in \partial G_h \setminus \{t=0\}, \tag{4.2b}$$

wobei $[u_h]_{t,x} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ für alle Punkte $u_h(\tilde{t},\tilde{x})$ mit $(\tilde{t},\tilde{x}) \in G_h \setminus \{(t,x)\}$ steht. Diese

Schreibweise brauchen wir für die Definition $4.1.1$. Da G_h ein diskretes Gitter ist, besteht (4.2a) aus $N = |G_h|$ nichtlinearen Gleichungen. Das Approximationsschema (4.2) wird anschließend verwendet um die HJB Gleichung zu approximieren.

Definition 4.1.1. *Der Approximationsoperator* S_h (4.1) *heißt* ***monoton****, falls für alle* $h > 0$*,*

$$S_h(t, x, r, [v_h]_{t,x}) \leq S_h(t, x, r, [w_h]_{t,x}) \quad \textit{für} \quad (t, x) \in G_h, r \in \mathbb{R}$$

und $v_h, w_h : G_h \cup \partial G_h \to \mathbb{R}$ *mit* $v \geq w$ *punktweise.*

Definition 4.1.2. *Das Approximationsschema* (4.2) *heißt* ***stabil****, falls für alle* $h > 0$ *eine beschränkte Lösung* $u_h \in B(\overline{\Omega}_T)$ *von* (4.2) *existiert, i.e. es existiert eine Konstante* $K > 0$ *mit*

$$||u_h||_{L^\infty} \leq K.$$

Bemerkung 4.1.3. $u_h \in B(\overline{\Omega}_T)$ *folgt in unserem Fall schon daraus, dass* Ω_T *in der Anwendung beschränkt und* G_h *ein Gitter ist.*

Jetzt kommen wir zur Definition der Konsistenz des Schemas, welche hier speziell für den Fall definiert ist, dass die zu lösende PDGl die HJB Gleichung (2.11) ist.

Definition 4.1.4. *Das Approximationsschema* (4.2) *heißt* ***konsistent****, falls für jeden Punkt* $(t, x) \in \Omega_T$ *und*

(i) jede beschränkte Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_T)$*,*

(ii) jede Folge $\{(t_h, x_h)\}_h$*, mit* $(t_h, x_h) \in G_h$ *und* $(t_h, x_h) \to (t, x)$ *für* $h \to 0$*, und*

(iii) jede Folge $\{\xi_h\}_h$*, mit* $\xi_h \in \mathbb{R}$ *und* $\xi_h \to 0$ *für* $h \to 0$*,*

gilt

$$\lim_{h\to 0} S_h(t_h, x_h, \phi(t_h, x_h) + \xi_h, [\phi + \xi]_{t_h,x_h}) = -\partial_t\phi(t, x) + \sup_{q\in Q}\{-L^q\phi(t, x) - f^q(t, x)\}, \tag{4.3}$$

wobei der Differenzialoperator L *und die Kostenfunktion* f *wie in Kapitel 2 definiert sind.*[1]

[1] Falls $F := \sup_{q\in Q}\{-L^q\phi(t, x) - f^q(t, x)\}$ nicht in allen seinen Argumenten stetig ist, kann F durch seine obere halbstetige Einhüllende F^*, bzw. durch seine untere halbstetige Einhüllende F_*, approximiert werden.

Nun kommen wir zu dem Konvergenztheorem von Barles-Souganidis.

Theorem 4.1.5 (Barles-Souganidis)**.** *[2] Es sei* $\{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *eine Folge mit* $h_m = (\Delta t_m, \Delta x_m) \to 0$*, für* $m \to \infty$*,* $h_m > 0$ *und* G_{h_m} *eine Folge von zugehörigen Gittern.*
Seien weiter $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *die Lösungen eines Approximationsschemas* (4.2) *mit* $u_m \in B(\overline{\Omega}_T)$ *für* $m \in \mathbb{N}$*.*
Falls dieses Approximationsschema nach Definition $4.1.1$ *monoton, nach Definition* $4.1.2$ *stabil und nach Definition* $4.1.4$ *konsistent ist und das Vergleichsprinzip aus Theorem* $2.3.11$ *gilt, konvergieren* $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen die Viskositätslösung* u *der HJB Gleichung* (2.11) *mit Randbedingung* (2.9b)*.* [2]

Beweis. Siehe G. Barles und P. Souganidis [2]. □

Bemerkung 4.1.6. *Wie in Kapitel 2 Theorem* $2.3.11$ *erwähnt, gilt unter Voraussetzungen das Vergleichsprinzip im Fall der HJB Gleichung.*

Bevor wir mit der Finiten-Differenzen-Methode ein Schema beschreiben, das die Bedingungen für Theorem $4.1.5$ erfüllt, werden wir vorerst die Wohldefiniertheit des diskreten Problems durch Howard's Algorithmus behandeln.

4.2 Howard's Algorithmus

Zum Lösen der nichtlinearen diskreten Gleichungen, die aus (4.2) hervorgehen, benutzen wir den iterativen Howard's Algorithmus. Dieser wird in der Literatur auch „policy iteration" genannt. Wir wenden den Algorithmus auf ein Problem der Form (4.4) an.

$$\text{Suche } v \in \mathbb{R}^M \text{ mit } \max_{q\in Q}\{(-B^q v - c^q)_i\} = 0 \text{ für alle } i \in \{1,\dots,M\}, \tag{4.4}$$

[2] In [17] betrachtete Oberman stabile Schemas, welche aber nicht monoton sind und nicht gegen die Lösungsfunktion konvergieren. Das veranschaulicht, dass die Monotonie des Schemas eine notwendige Bedingung ist.

wobei $M \in \mathbb{N}$, $B^q \in \mathbb{R}^{M\times M}$ eine Matrix und $c^q \in \mathbb{R}^M$ ein Vektor ist für alle $q \in Q$. Q ist wieder eine kompakte Menge.

Es soll (4.4) iterativ gelöst werden. Dafür wird ein Startwert $q^{(0)} \in Q^M$ gewählt. Iterativ wird im k-ten Schritt, um $v^{(k)} \in \mathbb{R}^M$ zu bekommen, erst das lineare diskrete Problem

$$(-B^{q_i^{(k)}} v^{(k)} - c^{q_i^{(k)}}) = 0, \text{ für alle } i \in \{1, \dots, M\},$$

gelöst, auch „policy evaluation“ genannt, und dann wird mit $v^{(k)}$,

$$q^{(k+1)} = (q_i^{(k+1)})_{i\in\{1,\dots,M\}} = (\arg\max_{q\in Q}\{(-B^q v^{(k)} - c^q)_i\})_{i\in\{1,\dots,M\}}$$

bestimmt, auch „policy improvement “ genannt. Da das Maximum komponentenweise angenommen wird, müssen in jedem Iterationsschritt M Optimierungsprobleme gelöst werden, um $q^{(k+1)}$ zu errechnen.

Algorithm 1 Howard's Algorithmus

1: *Wähle Startwert* $q^{(0)} \in Q^M$
2: **for** $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**
3: *Berechne* $v^{(k)} : (-B^{q_i^{(k)}} v^{(k)} - c^{q_i^{(k)}})_i = 0 \ \forall i.$
4: *Bestimme* $q^{(k+1)} : q_i^{(k+1)} = \arg\max_{q\in Q}\{(-B^q v^{(k)} - c^q)_i\} = 0 \ \forall i.$
5: **end for**

Für die Konvergenz müssen die Matrizen B^q nach Definition $4.2.1$ monoton sein für alle $q \in Q$.

Definition 4.2.1. *Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{M\times M}$ heisst monoton, falls für alle $v \in \mathbb{R}^M$ gilt,*

$$Bv \geq 0 \implies v \geq 0.$$

Lemma 4.2.2. *Falls die Matrix B^q monoton ist für alle $q \in Q$, gilt für die Iterierten in Howard's Algorithmus:*

$$v^{(k+1)} \geq v^{(k)} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt nach Zeile 3 des Howard's Algorithmus: $-B^{q_i^{(k)}} v^{(k)} - c^{q_i^{(k)}} = 0$ als auch $-B^{q_i^{(k+1)}} v^{(k+1)} - c^{q_i^{(k+1)}} = 0$. Aus Zeile 4 folgt: $-B^{q_i^{(k+1)}} v^{(k)} - c^{q_i^{(k+1)}} \geq -B^{q_i^{(k)}} v^{(k)} - c^{q_i^{(k)}} = 0$. Nun gilt also $B^{q_i^{(k+1)}}(v^{(k+1)} - v^{(k)}) = -(-B^{q_i^{(k+1)}} v^{(k+1)} -$

$c^{q_i^{(k+1)}}) - B^{q_i^{(k+1)}} v^{(k)} - c^{q_i^{(k+1)}} = -B^{q_i^{(k+1)}} v^{(k)} - c^{q_i^{(k+1)}} \geq 0$. Mit der Monotonie von $B^{q_i^{(k+1)}}$ für alle i folgt dann die Aussage $v^{(k+1)} - v^{(k)} \geq 0$. □

Theorem 4.2.3. *[3, Seite 8, Theorem 3.4] Falls*

(i) $B^q \in \mathbb{R}^{M \times M}$ *monoton ist für alle* $q \in Q$ *und*

(ii) für die kompakte Menge Q *gilt, dass* $q \in Q \to B^q \in \mathbb{R}^{M \times M}$ *und* $q \in Q \to c^q \in \mathbb{R}^M$ *stetige Abbildungen sind,*

dann hat (4.4) *eine eindeutige Lösung* $v^* \in \mathbb{R}^M$*, und für jeden Startvektor* $q^{(0)} \in Q^M$*, konvergieren die Iterierten* $v^{(k)} \in \mathbb{R}^M$ *des Howard's Algorithmus global, i.e.*

$$\lim_{k \to \infty} ||v^{(k)} - v^*|| = 0,$$

und superlinear, i.e.

$$||v^{(k+1)} - v^*|| = o(||v^{(k)} - v^*||) \text{ für } k \to \infty.$$

Beweis. Siehe O. Bokanowski, S. Maroso und H. Zidani [3, Seite 8]. □

Lemma 4.2.4. *Falls für eine Matrix* $B = (b_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,M\}} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ *gilt, dass*

(i) alle Diagonaleinträge nicht-negativ sind, i.e. $b_{i,i} \geq 0$ *für* $i \in \{1, \dots, M\}$*,*

(ii) alle Nicht-Diagonaleinträge nicht-positiv sind, i.e. $b_{i,j} \leq 0$ *für* $i, j \in \{1, \dots, M\}$*,* $i \neq j$*, und*

(iii) B *strikt diagonaldominant ist, i.e.* $|b_{i,i}| > \sum_{i \neq j} |b_{i,j}|$ *für* $i \in \{1, \dots, M\}$*,*

dann ist B *monoton nach Definition* $4.2.1$*.*

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^M$ mit $Bv \geq 0$. Angenommen $v \ngeq 0$, dann existiert $j \in \{1, \dots, M\}$ mit $v_j < 0$. Sei $v_k = \min_{j \in \{1,\dots,M\}}(v_j)$ der kleinste Eintrag von v. Jetzt gilt, dass $0 \leq \sum_j b_{k,j} v_j = b_{k,k} v_k + \sum_{j \neq k} b_{k,j} v_j = |b_{k,k}| v_k - \sum_{j \neq k, v_j \geq 0} |b_{k,j}| v_j - \sum_{j \neq k, v_j < 0} |b_{k,j}| v_j \leq |b_{k,k}| v_k - \sum_{j \neq k, v_j \geq 0} |b_{k,j}| v_k = C v_k$ mit $C > 0 \Rightarrow v_k \geq 0$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also gilt, dass $v \geq 0$ und damit B monoton ist. □

Wenn in (4.4) $M = N = |G_h|$ ist, steht jedes $i \in \{1, \dots, N\}$ für einen Gitterpunkt $(t, x) \in G_h$ im Zeit-Zustandsraum und Howard's Algorithmus sucht eine Lösung

für alle Punkte gleichzeitig, auch „time-space “ genannt. Wir werden allerdings das Schema, beginnend mit $t = T$, für jeden diskreten Zeitschritt in $G_{h,1}$ lösen. Für diesen Fall ist im Zeitschritt $t_k \in G_{h,2}$, $M = N_2 = |G_{h,2}|$ und jedes $i \in \{1, \dots, N_2\}$ steht für einen Punkt (t_k, x_i) mit $x_i \in G_{h,2}$.

4.3 Finite-Differenzen-Methode

Finite-Differenzen-Methoden (FDM) sind numerische Verfahren zur Lösung gewöhnlicher oder partieller Differenzialgleichungen. Die Ableitungen in der Differenzialgleichung werden dabei an endlich vielen äquidistanten Gitterpunkten durch Differenzenquotienten approximiert. Die approximierten Differenzialgleichungen an verschiedenen Gitterpunkten lassen sich dann in Gleichungssystemen für die numerische Lösung darstellen.

Im Folgenden werden wir beschreiben, wie mit einer FDM ein Approximationsschema (4.2) erstellt werden kann, welches die Bedingungen von Theorem $4.1.5$ erfüllt.

Finite-Differenzen-Methoden approximieren die Lösung u der PDGl auf einer Menge $(0, T) \times \Omega$ durch eine Funktion u_h, welche auf einer endlichen Menge von Punkten, dem Gitter, definiert ist. Sei hierfür $G_h = G_{h,1} \times G_{h,2} \subset \overline{\Omega}_T = [0, 1] \times \overline{\Omega}$ ein Gitter von diskreten Punkten mit Feinheit h, wobei wir hier speziell ein rechteckiges Gitter $G_{h,2}$ annehmen. Die Anzahl der Gitterpunkte seien $N_1 = |G_{h,1}|$, $N_2 = |G_{h,2}|$ und $N = |G_h| = N_1 \cdot N_2$. Die Randpunkte sind

$$\partial G_h := \{0, T\} \times G_{h,2} \cup G_{h,1} \times \partial G_{h,2} \subset \partial \Omega_T.$$

Für spätere Zwecke versehen wir die Gitterpunkte mit zwei bijektiven Zählfunktionen $z_1 : \{1, \dots, N_1\} \to G_{h,1}$ und $z_2 : \{1, \dots, N_2\} \to G_{h,2}$. Zum Beispiel steht $x_i = z_2(i)$ für den i-te Eintrag des Gitters $G_{h,2}$.

Kommen wir nun zurück zu dem Modell des Intraday-Handels. Dort haben wir eine HJB Gleichung mit Randbedingung:

$$-\partial_t u(t,x) + \max_{q\in Q}\{-L^q u(t,x) - f^q(t,x)\} = 0 \qquad \text{für } (t,x) \in \Omega_T,$$
$$u(t,x) = g(t,x) \qquad \text{für } (t,x) \in \partial\Omega_T.$$

Der lineare Differenzialoperator ist hierbei

$$L^q u = (\mu_Y + \psi^q)\cdot \partial_Y u + \mu_D \partial_Z u + q\partial_Z u + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \partial_{YY} u + \frac{1}{2}\sigma_D^2 \partial_{ZZ} u.$$

Nun approximieren wir $L^q : C^{(1,2)}(\Omega_T) \to \mathbb{R}$ durch einen Finite-Differenzen-Operator $L_h^q : C_b(G_h) \to \mathbb{R}$, also $L^q \approx L_h^q$. Nach diesem Abschnitt geben wir zwei konkrete Fälle an, wie L_h^q gewählt werden kann, sodass die Monotonie-Eigenschaft gilt. Beim ersten Schema wird der Differnzialoperator durch Vorwärts-Differenzen (vgl. (4.9)) und beim zweiten Schema durch zentrale Differenzen, die mit bestimmen $\epsilon-$Werten gewichtet sind (vgl. (4.10)), approximiert.

Um das diskrete Schema zu bekommen, werden wir die Ableitung nach der Zeit implizit diskretisieren,

$$\Delta_t u_h(t_k,x_i) = \frac{u_h(t_{k+1},x_i) - u_h(t_k,x_i)}{t_{k+1}-t_k} \text{ für } (t_k,x_i) \in G_h,$$

und den Operator L_h anwenden. Wir erhalten das Approximationsschema (4.6).

$$-\Delta_t u_h(t_k,x_i) + \max_{q\in Q}\{-L_h^q u_h(t_k,x_i) - f^q(t_k,x_i)\} = 0 \qquad \text{für } (t_k,x_i) \in G_h, \tag{4.6a}$$
$$u_h(t_k,x_i) = g(t_k,x_i) \quad \text{für } (t_k,x_i) \in \partial G_h. \tag{4.6b}$$

Um $u_h(t_k,x_i)$ für $x_i \in G_{h,2}$ zu errechnen, werden die diskreten Gleichungen (4.6) mit Hilfe des Howard's Algorithmus im Zeitschritt t_k gelöst. Dabei wird mit $t_k = T$ und den gegebenen Werten $u_h(T,x_i) = g(T)$ für $x_i \in G_{h,2}$ gestartet. Konkret werden zwei quadratische Matrizen $I^q, E^q \in \mathbb{R}^{N_2\times N_2}$ für $q \in Q$ erstellt, sodass

$$(-B^q v - c^q)_i = 0, \tag{4.7}$$

mit $B^q := I^q$ und $c^q := E^q w - f^q$ äquivalent ist zu

$$-\Delta_t u_h(t_k, x_i) - L_h^q u_h(t_k, x_i) - f^q(t_k, x_i) = 0, \tag{4.8}$$

wobei $v, w \in \mathbb{R}^{N_2}$ mit $v_i = u_h(t_k, x_i)$ und $w_i = u_h(t_{k+1}, x_i)$ für $i \in \{1, \dots, N_2\}$.

Da wir jetzt ein Problem der Form (4.4) haben, kann dieses mit Howard's Algorithmus berechnet werden, womit sich dann eine Lösung für (4.5) ergibt.

Bemerkung 4.3.1. *Falls für alle $q \in Q$, das Schema* (4.5) *monoton, die Matrix B^q monoton und das ganze Schema* (4.5) *stabil und konsistent ist, konvergiert das Schema gegen die eindeutige Viskositätslösung nach den Theoremen* (4.2.3) *und* (4.1.5).

Lemma 4.3.2. *Falls für alle $q \in Q$, die nicht-Diagonaleinträge von $-B^q$ nicht-positiv sind, ist das Schema* (4.5) *monton nach Definiton* $4.1.1$.

Beweis. Für ein $h > 0$, $(t_k, x_i) \in G_h, r \in \mathbb{R}$ und $u_h : G_h \cup \partial G_h \to \mathbb{R}$ ist $S_h(t_k, x_i, r, [u_h]_{t_k,x_i}) = -\Delta_t u_h(t_k, x_i) + \max_{q\in Q}\{-L_h^q u_h(t_k, x_i) - f^q(t_k, x_i)\}$. Seien nun $v_h, w_h : G_h \cup \partial G_h \to \mathbb{R}$ mit $v_h \geq w_h$ in G_h und $v, w \in \mathbb{R}^{N_2}$, mit $v_i = v_h(t_k, x_i)$ und $w_i = w_h(t_k, x_i)$ für $i \in \{1, \dots, N_2\}$. Da $-b_{i,j} \leq 0$ für $i \neq j$, folgt $(-B^q v - c^q)_i \leq (-B^q w - c^q)_i \iff -\Delta_t v_h(t_k, x_i) - L_h^q v_h(t_k, x_i) - f^q(t_k, x_i) \leq -\Delta_t w_h(t_k, x_i) - L_h^q w_h(t_k, x_i) - f^q(t_k, x_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, N_2\}$.
Also folgt $-\Delta_t v_h(t_k, x_i) + \max_{q\in Q}\{-L_h^q v_h(t_k, x_i) - f^q(t_k, x_i)\} = -\Delta_t v_h(t_k, x_i) - L_h^{q_*} v_h(t_k, x_i) - f^{q_*}(t_k, x_i) \leq -\Delta_t w_h(t_k, x_i) - L_h^{q_*} w_h(t_k, x_i) - f^{q_*}(t_k, x_i) \leq -\Delta_t w_h(t_k, x_i) + \max_{q\in Q}\{-L_h^q w_h(t_k, x_i) - f^q(t_k, x_i)\}$. □

4.3.1 Vorwärts-Differenzen

Das Kushner-Dupuis Schema wird in solchen Fällen häufig verwendet. Der Differenzialoperator wird dabei abhängig vom Wert, der davor steht, entweder durch

Vorwärts- oder Rückwärts-Differenzen approximiert. Dadurch ist die Monotonie gewährleistet.

In unserem Fall wird der Operator L (4.3) approximiert durch

$$L_h^q u_h(Y,Z) := \tag{4.9}$$

$$+\max\{\mu_Y+\psi(q),0\}\cdot\tfrac{u_h(Y+h_Y)-u_h(Y)}{h_Y}+\min\{\mu_Y+\psi(q),0\}\cdot\tfrac{u_h(Y)-u_h(Y-h_Y)}{h_Y}$$
$$+\max\{\mu_D+q,0\}\tfrac{u_h(Z+h_Z)-u_h(Z)}{h_Z}+\min\{\mu_D+q,0\}\tfrac{u_h(Z)-u_h(Z-h_Z)}{h_Z}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sigma_Y^2\tfrac{u_h(Y+h_Y)-2u_h(Y)+u_h(Y-h_Y)}{h_Y^2}+\tfrac{1}{2}\sigma_D^2\tfrac{u_h(Z+h_Z)-2u_h(Z)+u_h(Z-h_Z)}{h_Z^2},$$

mit $(Y,Z)\in\Omega, q\in Q$.

Theorem 4.3.3. *[19] Das diskrete Schema ist konsistent, stabil und monoton und konvergiert gegen die Viskositätslösung.* □

4.3.2 Zentrale Differenzen

Diesmal wird der Differenzialoperator L (4.3) durch zentrale Differenzen approximiert.

$$L_h^q u_h(Y,Z) := \tag{4.10}$$

$$+(\mu_Y+\psi(q))\cdot\tfrac{u_h(Y+h_Y)-u_h(Y-h_Y)}{2h_Y}+\mu_D\cdot\tfrac{u_h(Z+h_Z)-u_h(Z-h_Z)}{2h_Z}+q\cdot\tfrac{u_h(Z+h_Z)-u_h(Z-h_Z)}{2h_Z}$$
$$+\tfrac{1}{2}(\epsilon_{h,1}+\sigma_Y^2)\tfrac{u_h(Y+h_Y)-2u_h(Y)+u_h(Y-h_Y)}{h_Y^2}+\tfrac{1}{2}(\epsilon_{h,2}+\sigma_D^2)\tfrac{u_h(Z+h_Z)-2u_h(Z)+u_h(Z-h_Z)}{h_Z^2},$$

mit $(Y,Z)\in\Omega, q\in Q$, wobei $\epsilon_h=(\epsilon_{h,1},\epsilon_{h,2})$ gewählt wird, sodass die Monotonie gewährleistet ist:

$$\epsilon_{h,1}\geq(\mu_Y+\psi(q_{max}))h_Y-\sigma_Y^2, \tag{4.11a}$$
$$\epsilon_{h,2}\geq(\mu_D+q_{max})\cdot h_D-\sigma_D^2. \tag{4.11b}$$

Theorem 4.3.4. *[21, Seite 41, Theorem 14] Das Approximationsschema* (4.6) *mit dem Operator* (4.10) *ist konsistent, stabil und monoton.*

Beweis. Siehe Sebastian Steck [21, Seite 41]. □

Und somit konvergiert es gegen die Viskositätslösung.

4.4 Weitere existierende Methoden

Wir nennen zwei weitere existierenden monotonen numerischen Methoden, die Konvergenz gegen die Viskositätslösung garantieren und interessant für die Anwendung sein können.

Semi-Lagrangian-Schemas

Die von K. Debrabant und E. R. Jakobsen in [10] analysierten Semi-Lagrangian-Schemas sind eine Art Differenzen-Interpolations Schemas. Man betrachte die Approximationen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathsf{Tr}[\sigma\sigma^\top D^2\psi(x)] &= \sum_{m=1}^{P}\frac{1}{2}\frac{\psi(x+h\sigma_m)-2\psi(x)+\psi(x-h\sigma_m)}{h^2}+\mathcal{O}(h^2)\\
&\approx \sum_{m=1}^{P}\frac{1}{2}\frac{(\mathcal{I}\psi)(x+h\sigma_m)-2(\mathcal{I}\psi)(x)+(\mathcal{I}\psi)(x-h\sigma_m)}{h^2},\\
\mu\nabla\psi(x) &= \frac{1}{2}\frac{\psi(x+h^2\mu)-2\psi(x)+\psi(x+h^2\mu)}{h^2}+\mathcal{O}(h^2)\\
&\approx \frac{1}{2}\frac{(\mathcal{I}\psi)(x+h\mu)-2(\mathcal{I}\psi)(x)+(\mathcal{I}\psi)(x-h\mu)}{h^2},
\end{aligned}$$

für eine differenzierbare Funktion ψ und einem monotonen Interpolationsoperator $\mathcal{I}$ auf dem jeweiligen Gitter. Diese Diskretisierung ist nach Definition monoton. Sei also L_h^q ein monotoner Differenzialoperator von L^q. Semi-Lagrangian Schemas kommen dann durch eine Zeit-Diskretisierung der Gleichung

$$\partial_t u(t,x) - \inf_{q\in Q}\left\{L_h^q[\mathcal{I}_{\Delta x}u](t,x)+f^\lambda(t,x)\right\} = 0 \text{ für } (t,x)\in G_h$$

zustande.

Ein Vorteil dieser Methoden ist die garantierte Monotonie der Diskretisierungen, mit einer Konsitenz für die Schrittweite $h\to 0$. Allerdings wächst auch das Stencil

stetig, wenn das Gitter feiner wird.

Die Theorie funktioniert gut auf dem ganzen Raum $\mathbb{R}^d$. Wenn nicht-homogene Randbedingungen eingeführt werden, muss das Schema am Rand angepasst werden, was zu Problemen führen kann.

Finite-Elemente-Methode für isotropische Diffusion

In [16] konnten Max Jensen und Iain Smears die Konvergenz von bestimmten monotonen Finite-Elemente-Methoden gegen die Viskositätslösung von HJB Gleichungen mit isotropischer Diffusion zeigen.

Isotropischer Diffusion heißt dabei, dass für $q \in Q$, $(t, x) \in \Omega_T$ die Diffusionsmatrix $a^q(t, x) \equiv c \cdot E$, wobei E Einheitsmatrix und $c > 0$.

5 Analyse des Endwerts

Wie in Kapitel 3 beschrieben, hat die Agentin zum Ende der Handelsperiode die Möglichkeit unter bestimmten Kosten konventionelle Energie zu produzieren. Um im nächsten Kapitel die Wertfunktion numerisch bestimmen zu können, wird der Endwert als Randfunktion benötigt. Dafür muss die optimale Menge an konventioneller Produktion zum Endzeitpunkt bekannt sein. Seperat zu dem stochastischen Optimalsteuerungsproblem resultiert daraus ein eigenes determinisitisches Optimierungsproblem.

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass der Endwert wohldefiniert ist. Anschließend wird für gegebene Kostenfunktionen der Endwert numerisch bestimmt.

In Abschnitt 5.1 wird das Optimierungsproblem des Endwerts eingeführt. In Abschnitt 5.2 wird gezeigt, dass ein eindeutiges Minimum existiert und wie dieses durch eine Fallunterscheidung gefunden werden kann. In Abschnitt 5.3 geben wir numerische Ergebnisse für die optimale konventionelle Produktion mit zugehörigem Endwert.

5.1 Deterministisches Optimierungsproblem für den Endwert

Wie in Kapitel 3 ist die Wertfunktion des Optimalsteuerungsproblems in $t \in (0,T)$ und $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$u(t;y,z) = \inf_{(q(\cdot),\xi)\in\mathcal{A}\times\Xi} \mathbb{E}^{t;y,z}\Big[\int_t^T (q_s \cdot P_s^{q,t,y})ds + g(\xi;Y_T,Z_T)\Big], \tag{5.1}$$

mit $\Xi \subset \mathbb{R}_0^+$ der Menge an zulässiger konventioneller Produktion und

$$g(\xi; Y_T, Z_T) = c(\xi) - (Z_T + \xi)\Big(Y_T - \big(h(T) + \alpha(Z_T + \xi)\big)\frac{|Z_T + \xi|}{Z_T + \xi}\Big) \tag{5.2}$$

$$= c(\xi) - (Z_T + \xi)Y_T + |Z_T + \xi| \cdot \Big(h(T) + \alpha(Z_T + \xi)\Big). \tag{5.3}$$

Wir werden zeigen, dass die Funktion $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $g_1(Y_T, Z_T) := \min_{\xi \in \Xi} g(\xi; Y_T, Z_T)$, für $(Y_T, Z_T) \in \mathbb{R}^2$, wohldefiniert ist. Womit (5.1) gleich

$$u(t; y, z) = \inf_{q(\cdot) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}^{t;y,z}\Big[\int_t^T (q_s \cdot P_s^{q,t,y})ds + g_1(Y_T, Z_T)\Big]$$

ist.

Das Optimierungsproblem ist also, für Werte $(Y_T, Z_T) \in \mathbb{R}^2$ den optimalen Umfang $\xi^* \in \Xi$ an zu produzierender konventioneller Energie zu finden, sodass

$$g(\xi^*; Y_T, Z_T) = \min_{\xi \in \Xi} g(\xi; Y_T, Z_T) = g_1(Y_T, Z_T). \tag{5.4}$$

Es folgen Annahmen an die Funktionen und Parameter.

Die Produktionskosten $c : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ für die konventionelle Energie seien stückweise stetig, streng monoton steigend mit monoton steigender Ableitung und $c(0) = 0$. Die Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, die den Strafterm repräsentiert, sei stetig, konvex, monoton fallend in $(-\infty, 0]$, monoton steigend in $[0, \infty)$ und $\alpha(0) = 0$. Außerdem gilt für den Spread im Endzeitpunkt $h(T) \geq 0$, denn $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$.

Der Umfang ξ an konventionell zu produzierender Energie ist nicht-negativ und nach oben beschränkt durch $\xi_{max} > 0$. Außerdem hat jedes Kraftwerk eine unteres Minimum und eine obere Schranke an Produktion. Also ist die Menge $\Xi \subset [0, \xi_{max}]$ an zulässigen ξ's, eine Vereinigung von kompakten Intervallen.

Um g_1 als Funktion für den Endwert zu verwenden, muss (5.4) wohldefiniert sein, i.e. für $(Y_T, Z_T) \in \mathbb{R}^3$ existiert genau ein $\xi^* \in \Xi$ mit $g(\xi^*; Y_T, Z_T) = g_1(Y_T, Z_T) > -\infty$.

5.2 Theoretische Analyse

Dieses Kapitel ist in drei Abschnitte unterteilt.

5.2.1 Wohldefiniertheit

Für jedes $\xi \in \Xi$ und $(Y_T, Z_T) \in \mathbb{R}^2$ ist g nach unten beschränkt:

$$g(\xi; Y_T, Z_T) \geq -(Z_T + \xi)Y_T \geq -(|Z_T| + |\xi_{max}|)|Y_T| > -\infty. \tag{5.5}$$

Damit gilt

$$|g_1(Y_T, Z_T)| < \infty \quad \text{für alle} \quad (Y_T, Z_T) \in \mathbb{R}^3.$$

Dass ein optimales $\xi^* \in \Xi$ existiert, das g minimiert, folgt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 5.2.1 (Existenz)**.** *Für alle $(Y_T, Z_T) \in \mathbb{R}^2$ existiert ein $\xi^* \in \Xi$ mit*

$$g(\xi^*; Y_T, Z_T) = g_1(Y_T, Z_T). \tag{5.6}$$

Beweis. Die Funktionen $c(\cdot)$ und $\alpha(\cdot)$ haben nur endlich viele Unstetigkeitsstellen. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \Xi$ die Unstetigkeitsstellen von $c(\cdot)$ und $b_1, \ldots, b_m \in \Xi$ von $\alpha(\cdot)$. Es seien dann $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n+m}$ mit $\{\xi_1, \ldots, \xi_{n+m}\} = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{b_1, \ldots, b_m\}$. Dann ist $g(\cdot; Y_T, Z_T)$ stetig auf dem kompakten Intervall $[\xi_{i-1}, \xi_i]$, für alle $i \in \{2, \ldots, n+m+1\}$ und somit existiert nach dem Satz von Weierstraß ein $\xi_i^* \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ mit

$$g(\xi_i^*; Y_T, Z_T) = \min_{\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]} g(\xi; Y_T, Z_T) =: g_i(Y_T, Z_T).$$

Damit ist mit $i^* := \arg\min_{i \in \{2,\ldots,n+m+1\}} g_i(Y_T, Z_T)$,

$$g(\xi_{i^*}; Y_T, Z_T) = g_1(Y_T, Z_T).$$

□

Darüber hinaus ist dieses Minimum eindeutig.

Lemma 5.2.2 (Eindeutigkeit)**.** *Für alle* $(Y_T, Z_T) \in \mathbb{R}^2$ *existiert genau ein* $\xi^* \in \Xi$ *mit*

$$g(\xi^*; Y_T, Z_T) = g_1(Y_T, Z_T). \tag{5.7}$$

Beweis. Sei $f(\xi) := c(\xi) - (Z_T + \xi)Y_T + |Z_T + \xi| \cdot h(T) + |Z_T + \xi| \cdot \alpha(Z_T + \xi)$, mit $\xi \in \Xi$. Aus Lemma $5.2.1$ folgt die Existenz eines $\xi^* \in \Xi$ das $f(\cdot)$ minimiert. Wir zeigen, dass $f : \Xi \to \mathbb{R}$ konvex ist. Die Produktionskosten $c(\cdot)$ sind streng monoton steigend mit monoton steigender Ableitung und somit strikt konvex. Der Term $-(Z_T + \xi)Y_T$ ist linear in ξ und damit auch konvex. Da die Betragsfunktion konvex ist, ist auch $|Z_T + \xi|h(T)$ konvex in ξ. Nach Definition ist auch $|Z_T + \xi|\alpha(Z_T + \xi)$ konvex in ξ. Also ist $f(\cdot)$ als Komposition von konvexen Funktionen, wovon mindestens eine Funktion strikt konvex ist, strikt konvex. Für strikt konvexe Funktionen gilt, dass das Minimum eindeutig ist. □

Zur Veranschaulichung ein Beispiel.

Beispiel 5.2.3. *Sei*

$$c(x) = 25 \cdot x, \qquad \alpha(x) = |x|, \qquad h(T) = 0,$$

dann ist für $(Y_T, Z_T) \in \mathbb{R}^2$*,*

$$\begin{aligned} g(\xi; Y_T, Z_T) &= 25 * \xi - (Z_T + \xi)Y_T + |Z_T + \xi| \cdot \Big(h_T + |Z_T + \xi|\Big) \\ &= (Z_T) \cdot (-Y_T + Z_T) + (25 - Y_T + 2D_T + 2X_T) \cdot \xi + \xi^2. \end{aligned}$$

Dann ist mit

$$\xi^* = \frac{(-25 + Y_T - 2Z_T)}{2}, \ \frac{dg(\xi^*; Y, Z)}{d\xi} = 0, \ \frac{d^2 g(\xi^*; Y, Z)}{(d\xi)^2} = 2 > 0.$$

Demnach ist ξ^* *das einzige Minimum und wir bekommen*

$$\begin{aligned} g(\xi^*; Y, Z) &= (Z_T) \cdot (-Y_T + Z_T) - \frac{(-25 + Y_T - 2Z_T)^2}{4} \\ &= 625 + Y_T \cdot (Y_T - 25 - 4Z_T) + 100(Z_T) + 4(Z_T)^2. \end{aligned}$$

Also falls in diesem Beispiel die prognostizierte Stromerzeugung $D_T = 200$ *MWh wäre, die verkaufte Menge an Strom auf dem Markt* $X_T = -700$ *MWh und der Preis zum Endzeitpunkt* $Y_T = 60$ *EUR/MWh, dann ist der optimale Umfang an konventioneller Produktion* $\xi^* = 517,5$ *MWh und* $g_1(Y_T, Z_T) = 1,0849 \cdot 10^6$.

5.2.2 Konkrete Form der Funktionen

Wie im Paper [15], sei der Strafterm durch die Funktion

$$\alpha(x) := \frac{1}{2}\Big(|x| - 20\Big)\mathbb{1}_{20<|x|\leq 45} + \Big(\big(|x| - 45\big) + \frac{25}{2}\Big)\mathbb{1}_{45<|x|}$$

gegeben. Damit sind $\alpha(\cdot)$ und $|\cdot|\alpha(\cdot)$ stetig und konvex, siehe Abbildung 5.1.

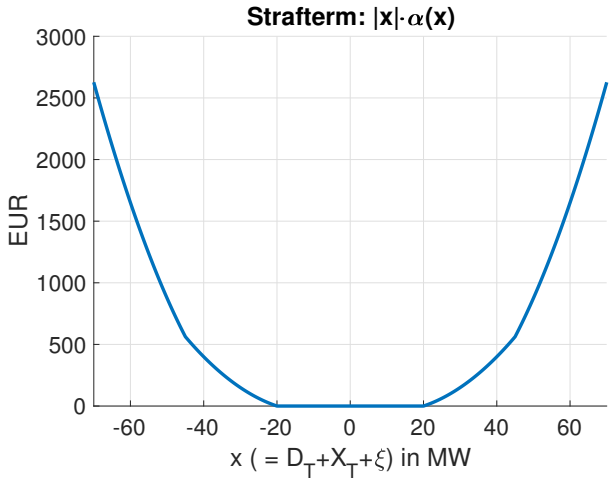


Abbildung 5.1: MATLAB-Plot: Strafterm

Nicht erfüllte Nachfrage kann unter bestimmten Produktionskosten $c(\cdot)$ zum Zeitpunkt T konventionell produziert werden. In diesem Modell verfügt die Agentin über $N \in \mathbb{N}$ konventionelle Einheiten. Die minimale (bzw. maximale) Kapazität zur Produktion jeder Einheit ist $\kappa_i^{\min}$ (bzw. $\kappa_i^{\max}$) für $i \in \{1, \ldots, N\}$. Die Marginalkosten c_i der jeweiligen Einheit $i \in \{1, \ldots, N\}$ werden konstant angenommen und sind außerdem aufsteigend sortiert, i.e. $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_N$. Des Weiteren wird angenommen, dass zuerst die erste Einheit gebraucht werden soll. Die Menge an

zulässigen Produktionen ist dann

$$\Xi = \{0\} \cup [\kappa_1^{\min}, \sum_{i=1}^{N} \kappa_i^{\max}].$$

Im Folgenden werden wir erklären wie sich unter diesen Annahmen, dann die Funktion $c : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ergibt. Dafür sei $\xi \geq 0$ die gewünschte Menge an zu produzierender Energie und $k_i \in [\kappa_i^{\min}, \kappa_i^{\max}]$ die Produktion der Einheit $i \in \{1, \ldots, N\}$, die so bestimmt werden soll, sodass die Kosten minimal sind und der Umfang ξ produziert wird. Nun ergeben sich folgende Fälle.

1. $\xi = 0$: Es wird nicht produziert, also ist $k_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.
2. $\xi \in (0, \kappa_1^{\min})$: Wird nicht erzeugt.
3. $\xi \in \left[\sum_{l=1}^{i^*-1} \kappa_l^{\max} + \kappa_{i^*}^{\min}, \sum_{j=1}^{i^*} \kappa_j^{\max} \right]$, für ein $i^* \in \{1, 2, \ldots, N\}$:
   - $k_i = \kappa_i^{\max},$ für $0 < i < i^*$
   - $k_i = \xi - \sum_{j=1}^{i^*-1} \kappa_j^{\max},$ für $i = i^*$
   - $k_i = 0,$ für $i^* < i \leq N.$
4. $\xi \in \left(\sum_{l=1}^{i^*} \kappa_l^{\max}, \sum_{j=1}^{i^*} \kappa_j^{\max} + \kappa_{i^*+1}^{\min} \right)$, für ein $i^* \in \{1, \ldots, N-1\}$:
   - $k_i = \kappa_i^{\max}$ für $0 < i < i^*$,
   - $k_i = \xi - \sum_{j=1}^{i^*-1} \kappa_j^{\max} - \kappa_{i^*+1}^{\min}$ für $i = i^*$,
   - $k_i = \kappa_i^{\min}$ für $i = i^* + 1$,
   - $k_i = 0$ für $i^* + 1 < i \leq N.$
5. $\xi > \xi_{max} := \sum_{i=1}^{N} \kappa_i^{\max}$: Kann nicht erzeugt werden.

Die Produktionskosten für dieses ξ sind dann gegeben durch die Summe

$$c(\xi) = \sum_{i=1}^{N} c_i k_i.$$

Im Folgenden werden wir davon ausgehen, dass es drei konventionelle Einheiten für die Produktion gibt. Erstens ein Kohlekraftwerk (Braunkohle), zweitens ein Gas-

und-Dampf-Kombikraftwerk (angetrieben mit Schwarzkohle) und drittens eine Gasturbine mit offenem Kreislauf. Die Kosten und Kapazitäten der Kraftwerke sind in der Tabelle gegeben.

	Steinkohle	Gasturbine	Gas und Dampfkraftwerk
Variirende Kosten	25 EUR/MWh	35 EUR/MWh	60 EUR/MWh
Maximale Produktion $\kappa_{i,\max}$	500 MW	400 MW	600 MW
Minimale Produktion $\kappa_{i,\min}$	250 MW	100 MW	60 MW

Tabelle 5.1: Kapazitäten und Produktionskosten der konventionellen Einheiten

Für diesen Fall erhalten wir dann bestimmte Marginal- und Produktionskosten, die in der Abbildung $5.2.2$ veranschaulicht sind.

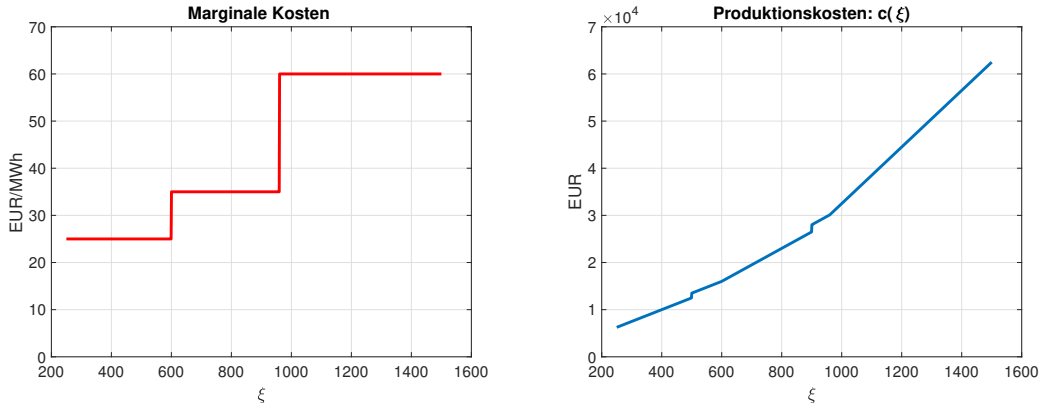


Abbildung 5.2: MATLAB-Plots: Marginale Kosten (links) und Produktionskosten (rechts)

5.2.3 Bestimmung des Minimums

Wir wollen die Funktion

$$g(\xi; Y_T, Z_T) = c(\xi) - (Z_T + \xi)Y_T + |Z_T + \xi| \cdot h(T) + |Z_T + \xi| \cdot \alpha(Z_T + \xi),$$

für (Y_T, Z_T) im Bereich $[-50, 250] \times [-1645, 145]$ minimieren. Das Minimum lässt sich analytisch durch Fallunterscheidungen bestimmen. Erst werden alle Punkte ausgewählt in denen die Funktionen $c(\cdot)$ und $\alpha(\cdot)$ nicht differenzierbar sind und die in der Menge $\Xi := \{0\} \cup [250, 1500]$ liegen. Diese Punkte sind

$$M := \{0, 250, 500, 600, 900, 950, 1500\}$$
$$\cup \big(\{-Z_T - 145, -Z_T - 45, -Z_T - 20, -Z_T + 20, -Z_T + 45, -Z_T + 145\} \cap \Xi\big).$$

Jetzt ist $g(\cdot; Y_T, Z_T)$ in der offenen Menge $\Xi \setminus M$ differenzierbar. Daraus folgt, dass falls

$$\frac{d}{d\xi} g(\xi^*; Y_T, Z_T) = 0$$

für ein $\xi^* \in \Xi \setminus M$, dann ist

$$\frac{d^2}{d\xi^2} g(\xi^*; Y_T, Z_T) = 2 \cdot \alpha'(|Z_T + \xi^*|) > 0,$$

also ist $g(\xi^*; Y_T, Z_T)$ ein lokales und damit, weil $g(\cdot; Y_T, Z_T)$ konvex ist, ein globales Minimum.

Wenn dieser Fall jedoch nicht auftritt, liegt das Minimum in der Menge M. Dafür muss nur

$$\min_{\xi \in M} g(\xi; Y_T, Z_T)$$

bestimmt werden, was eine Auswertung weniger Punkte ist. Damit ist $\xi^* \in \Xi$ mit $g(\xi^*; Y_T, Z_T) = g_1(Y_T, Z_T)$ gefunden.

5.3 Numerische Analyse

Im Folgenden wurde der Endwert konkret berechnet für die Funktionen $\alpha(\cdot)$ und $c(\cdot)$ aus Abschnitt 5.2. Für den Spread zum Endzeitpunkt wurde dabei $h(T) = 2$ angenommen. Die Werte von $Z_T = D_T + X_T$ liegen dabei in dem Intervall $[-1645$ MWh$, 145$ MWH$]$ und für den Unbeeinflussten Preis Y_T in $[-50$ EUR$, 250$ EUR$]$. Die optimale konventionelle Produktion ξ^* für verschiedene Werte (Y_T, Z_T) wird dabei in Abbildung 5.3 gezeigt.

In Abbildung 5.5 wurden die Werte aus Abbildung 5.3 in die Kostenfunktion eingesetzt, wodurch sich der Endwert ergibt. Die verhältnismässig hohen Werte des Endwerts für Z_T die grösser Null sind, kann man sich so erklären, da diese nicht durch konventionelle Energie ausgeglichen werden können, weil zum Endzeitpunkt keine Energie verbraucht werden kann, sondern nur produziert.

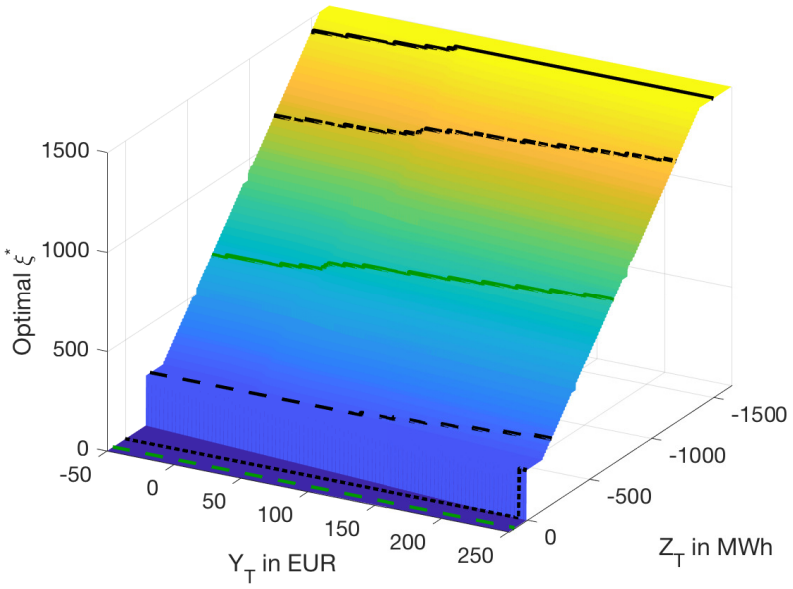


Abbildung 5.3: MATLAB-Plot: Optimale konventionelle Produktion ξ^* abhängig von verschiedenen Werten Y_T und Z_T.

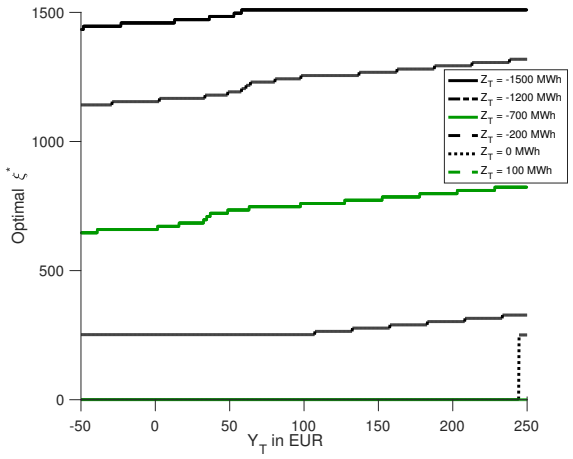


Abbildung 5.4: MATLAB-Plot: Optimale konventionelle Produktion ξ^*, speziell 2D für bestimmte Werte für Z_T.

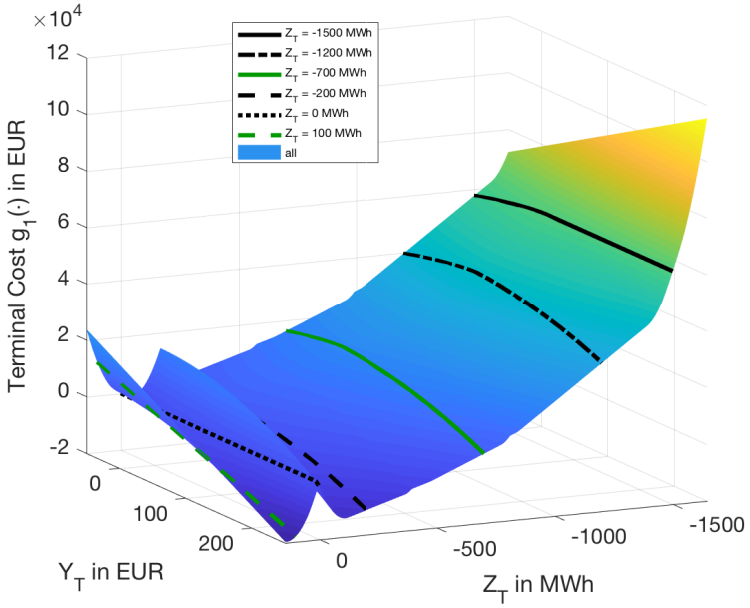


Abbildung 5.5: MATLAB-Plot: Endwertfunktion $g_1(\cdot)$ abhängig von verschiedenen Werten Y_T und Z_T.

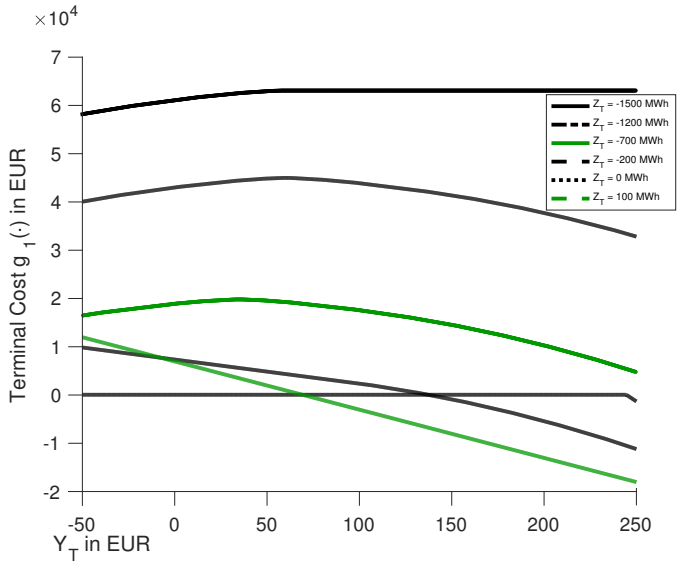


Abbildung 5.6: MATLAB-Plot: Endwertfunktion $g_1(\cdot)$, speziell 2D für bestimmte Werte für Z_T.

6 Numerische Ergebnisse

Wir werden allgemein das Zeitintervall $(0, T) = (0, 1)$ verwenden. Falls in der Anwendung das Zeitintervall nicht genormt ist, sondern das Intervall $(\tilde{t}_0, \tilde{T})$ von Interesse ist, können die Werte für $\tilde{t} \in (\tilde{t}_0, \tilde{T})$ mit

$$t(\tilde{t}) := \frac{\tilde{t} - \tilde{t}_0}{\tilde{T} - \tilde{t}_0} \in (0, 1)$$

transformiert werden.

Der Zeit-Ort-Definitionsbereich, den wir hier betrachten ist

$$\begin{aligned} \Omega_T &= (0, T) \times (Y_{min}, Y_{max}) \times (Z_{min}, Z_{max}) \\ &= (0, 1) \times (-50, 250) \times (-1645, 145). \end{aligned}$$

Die Parameter, die wir verwenden sind

$$\begin{aligned} h(t) = 0, \qquad & \varphi(t, q) = 0,03 \cdot q, \qquad & \psi(q) = 0, \\ & \mu_D = \mu_Y = 0, \qquad & \sigma_D = \sigma_Y = 0,1. \end{aligned}$$

6.1 Fehlerplots für analytischen Spezialfall

Wir betrachten wie in Abschnitt 3.4 die analytische Lösung für den Spezialfall. Wir wenden darauf die Vorwärts-Differenzen und die Zentralen Differenzen aus Abschnitt 4.3 an. In den Abbildungen 6.1, 6.2, 6.3 und 6.4 sehen wir die Fehler-Plots bezüglich verschiedener Fehlertypen und Diskretisierungen.

Die Startwerte $A_0, B_0, F_0, G_0, H_0, K_0 \in \mathbb{R}$ wurden dabei durch die Methode der kleinsten Quadrate an den Endwert angepasst.

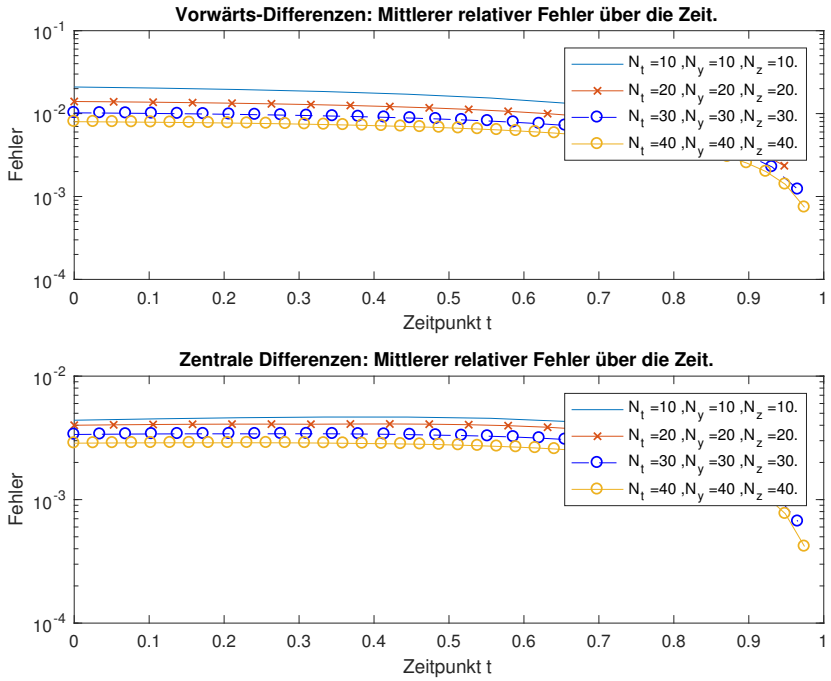


Abbildung 6.1: MATLAB-Plots: Mittlerer relativer Fehler über die Zeit für unterschiedlich feine Diskretisierungen für Vorwärts-Differenzen (oben) und Zentrale Differenzen (unten).

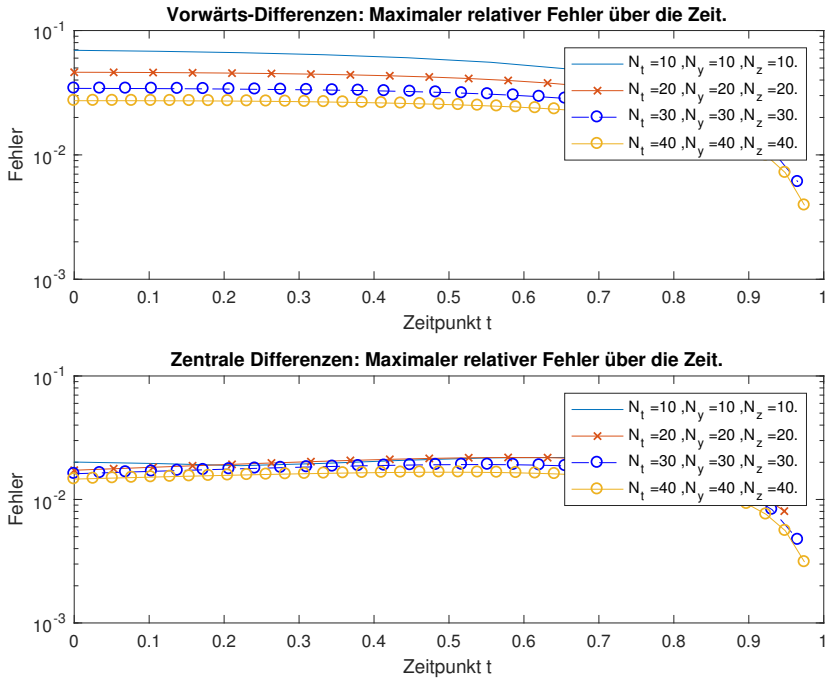


Abbildung 6.2: MATLAB-Plots: Maximaler relativer Fehler über die Zeit für unterschiedlich feine Diskretisierungen für Vorwärts-Differenzen (oben) und Zentrale Differenzen (unten).

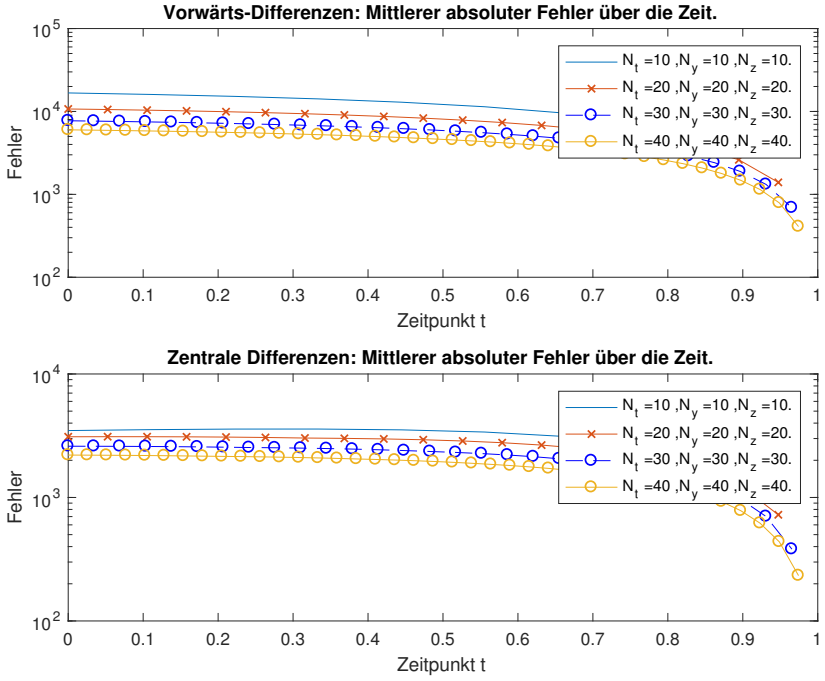


Abbildung 6.3: MATLAB-Plots: Mittlerer absoluter Fehler über die Zeit für unterschiedlich feine Diskretisierungen für Vorwärts-Differenzen (oben) und Zentrale Differenzen (unten).

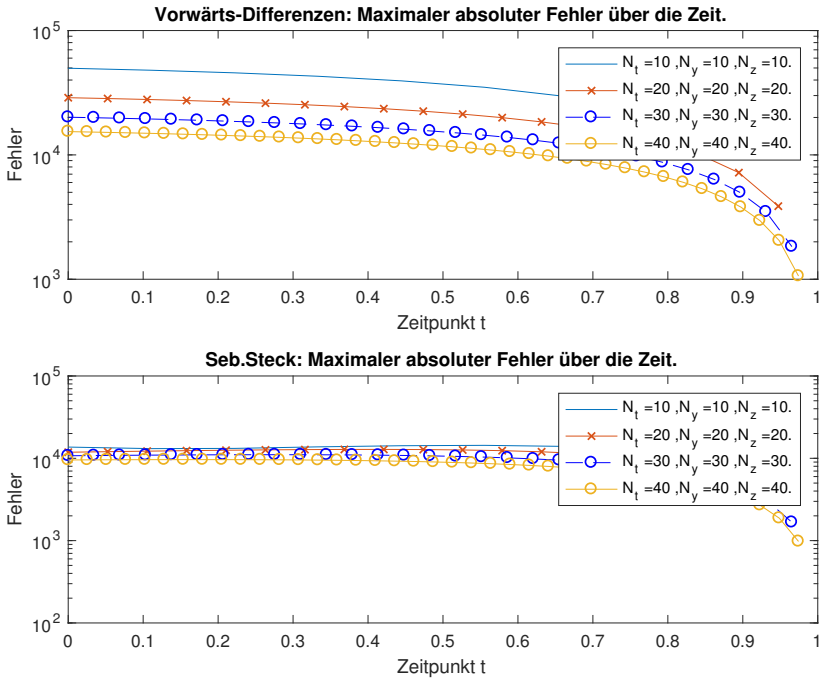


Abbildung 6.4: MATLAB-Plots: Maximaler absoluter Fehler über die Zeit für unterschiedlich feine Diskretisierungen für Vorwärts-Differenzen (oben) und Zentrale Differenzen (unten).

6.2 HJB aus dem Intraday-Handel

In Abbildung 6.5 wurden Vorwärts-Differenzen auf die HJB Gleichung angewendet. Der Endwert wurde wie in Kapitel 5 berechnet. Der Definitionsbereich auf dem gerechnet wurde, wurde vergrössert und die Randwerte der analytischen Lösung aus Abschnitt 3.4 verwendet. Anschließend wurde der Rand wieder verkleinert. Geplottet wurde zum Strartzeitpunkt $t = 0$.

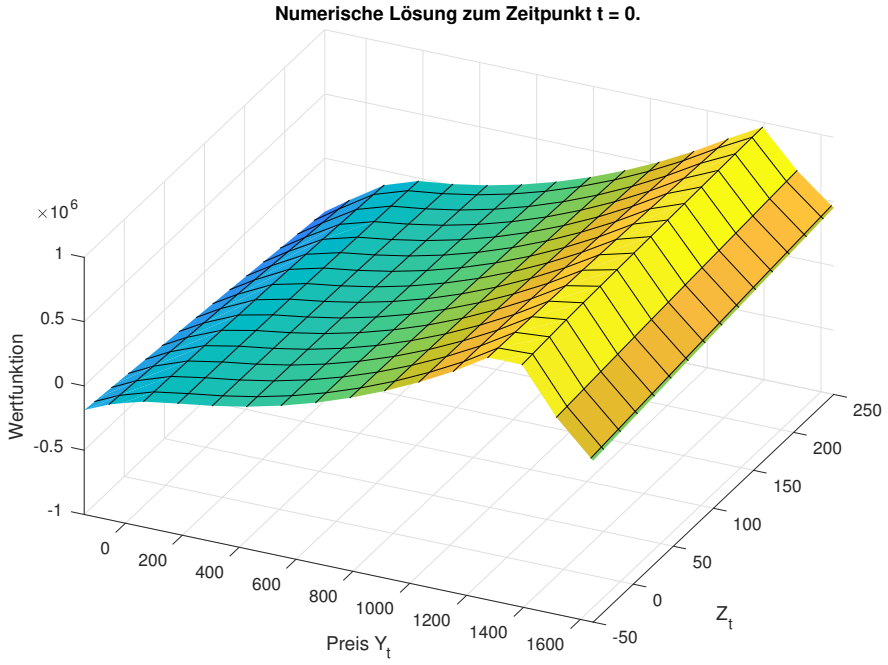


Abbildung 6.5: MATLAB-Plot: Numerische Lösung der HJB Gleichung aus dem Intraday-Handel zum Zeitpunkt 0.

Die optimale Handelsstrategie ist sozusagen ein Nebenprodukt, wenn die Wertfunktion berechnet wird. Wir haben diese in Abbildung 6.2 für konstante Werte für Z_t und Y_t über die Zeit geplottet.

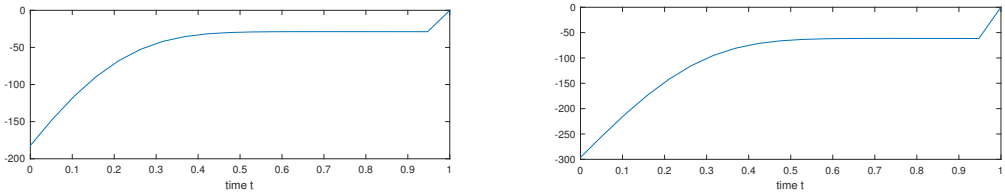


Abbildung 6.6: MATLAB-Plots: Optimale Handelsposition für $Z_t = -547.37$ MWh, mit $Y_t = 26.32$ EUR/MWh (links) und $Y_t = 89.47$ EUR/MWh (rechts).

7 Fazit und Ausblick

Fazit

In dieser Arbeit haben wir das mathematische Modell des Intraday-Handels beschrieben und analysiert, das deterministische Optimierungsproblem für den Endwert gelöst und die aus dem Intraday-Handel resultierende HJB Gleichung für Beispielwerte numerisch gelöst. Insgesamt wurden Lösungsmethoden für eine reale Problemstellung aus der Wirtschaft behandelt, wobei nie das Ziel aus den Augen gelassen wurde, diese mit der passenden Theorie zu untermauern.

Im Speziellen haben wir gezeigt, dass das zugehörige stochastische Optimalsteuerungsproblem unter bestimmten Voraussetzungen wohldefiniert ist. Wir haben des Weiteren gesehen, dass die Wertfunktion die eindeutige Viskositätslösung der HJB Gleichung ist. Insbesondere ist diese Viskositätslösung gleichmäßig stetig. Außerdem konnten wir den betrachteten Endwert für unseren Fall so gestalten, dass dieser wohldefiniert und lösbar ist. Ein weiterer wichtiger Punkt, den wir festhalten können, ist die Erkenntnis, dass die approximierten Lösungen der angewandten numerischen Methoden gegen die eindeutige Viskositätslösung konvergieren.

Da diese Arbeit ein laufendes Projekt darstellt, wurden während des Anfertigungsprozesses die Notationen, Parameter und Funktionen immer wieder geändert. Andere Herausforderungen ergaben sich im Hinblick auf die Vielfältigkeit des behandelten Themas: So mussten nicht nur die komplexen Theoriegebiete der HJB Gleichungen und der Viskositätslösungen detailliert studiert werden, sondern auch jene, die sich mit den relevanten wirtschaftswissenschaftlichen Zusammenhängen beschäftigen. Darüber hinaus wurden die passende Inhalte aus der stochastischen Analysis benötigt. Bei der Suche möglicher numerischer Methoden hat sich gezeigt, dass von den verschiedenen Verfahren ohne Weiteres nur Finite-Differenzen-

Methoden für unseren Fall anwendbar sind. Erwähnenswert ist zudem, dass bei den Implementierungen die fehlenden Randbedingungen ein zusätzliches Problem darstellten.

Ausblick

Gegenstand weiterer Untersuchungen könnte es sein andere numerische Methoden, wie Finite-Differenzen-Methoden oder Semi-Lagrangian-Schemas, in Betracht zu ziehen. Ob das für den schwierigen Fall der Intraday-HJB praktikabel ist, benötigt sowohl theoretische als auch numerische Analyse.

Des Weiteren wäre ein Vergleich mit realen Marktdaten ein zusätzlicher Punkt, der von großem Interesse ist.

Da das Ziel des Projekts ist, in Echtzeit eine Handelsstrategie der Agentin zu finden, erscheint es attraktiv Modellreduktionen in Betracht zu ziehen, da dadurch das System effizienter in Echtzeit gelöst werden könnte und stetig einlaufende Daten behandeln könnte.

Abgesehen von diesen Erweiterungsmöglichkeiten denken wir, dass die vorliegende Arbeit bereits einen wertvollen Teil zur abgehandelten Thematik beiträgt.

Abbildungsverzeichnis

1.1 Zusammenhang der Arbeit 4

2.1 Skizzierung der Stoppzeit τ 11
2.2 Skizzierung der Viskositätslösung 19

5.1 MATLAB-Plot: Strafterm 55
5.2 MATLAB-Plots: Marginale Kosten (links) und Produktionskosten (rechts) 57
5.3 MATLAB-Plot: Optimale konventionelle Produktion ξ^* abhängig von verschiedenen Werten Y_T und Z_T. 59
5.4 MATLAB-Plot: Optimale konventionelle Produktion ξ^*, speziell 2D für bestimmte Werte für Z_T. 60
5.5 MATLAB-Plot: Endwertfunktion $g_1(\cdot)$ abhängig von verschiedenen Werten Y_T und Z_T. 60
5.6 MATLAB-Plot: Endwertfunktion $g_1(\cdot)$, speziell 2D für bestimmte Werte für Z_T. 61

6.1 MATLAB-Plots: Mittlerer relativer Fehler über die Zeit für unterschiedlich feine Diskretisierungen für Vorwärts-Differenzen (oben) und Zentrale Differenzen (unten). 63
6.2 MATLAB-Plots: Maximaler relativer Fehler über die Zeit für unterschiedlich feine Diskretisierungen für Vorwärts-Differenzen (oben) und Zentrale Differenzen (unten). 64
6.3 MATLAB-Plots: Mittlerer absoluter Fehler über die Zeit für unterschiedlich feine Diskretisierungen für Vorwärts-Differenzen (oben) und Zentrale Differenzen (unten). 65

6.4 MATLAB-Plots: Maximaler absoluter Fehler über die Zeit für unterschiedlich feine Diskretisierungen für Vorwärts-Differenzen (oben) und Zentrale Differenzen (unten). 66
6.5 MATLAB-Plot: Numerische Lösung der HJB Gleichung aus dem Intraday-Handel zum Zeitpunkt 0. 67
6.6 MATLAB-Plots: Optimale Handelsposition für $Z_t = -547.37$ MWh, mit $Y_t = 26.32$ EUR/MWh (links) und $Y_t = 89.47$ EUR/MWh (rechts). 68

Tabellenverzeichnis

5.1 Kapazitäten und Produktionskosten der konventionellen Einheiten . . 57

Literaturverzeichnis

[1] AÏD, R. ; GRUET, P. ; PHAM, H. : An optimal trading problem in intraday electricity markets. In: *Math. Finan. Econ., 10(1) 49–85,* (2015)

[2] BARLES, G. ; SOUGANIDIS, P. : Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second-order equations. In: *Asymptotic Analysis, vol. 4, no. 3, pp. 271-283,* (1991)

[3] BOKANOWSKI, O. ; MAROSO, S. ; ZIDANI, H. : Some convergence results for Howard's algorithm. In: *SIAM J. Numer. Anal., 47(4), 3001–3026,* (2009)

[4] BONNANS, J. F. ; OTTENWAELTER, E. ; ZIDANI, H. : A fast algorithm for the two dimensional HJB equation of stochastic control. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, Volume 38 (2004) no. 4, p. 723-735,* (2004)

[5] BONNANS, J. F. ; ZIDANI, H. : Consistency of generalized finite difference schemes for the stochastic HJB equation. In: *SIAM J. Numer. Anal., 41(3), 1008–1021,* (2003)

[6] CAFFARELLI, L. A. ; SILVESTRE, L. : On the Evans–Krylov Theorem. In: *Proceedings of the American Mathematical Society Volume 138, Number 1, January 2010, Pages 263–265,* (2009)

[7] CRANDALL, M. G. ; EVANS, L. C. ; P.L.LIONS: Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. In: *Transactions of the American Mathematical Society Volume 282,* (1984)

[8] CRANDALL, M. G. ; ISHII, H. ; LIONS, P.-L. : User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. (1992.)

[9] CRANDALL, M. G. ; LIONS, L. P.-L. : Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. In: *transactions of the american mathematical society Volume 277, Number 1,* (1983)

[10] DEBRABANT, K. ; JAKOBSEN, E. R.: Semi-Lagrangian schemes for linear and fully nonlinear diffusion equations. In: *Math. Comp. 82, no. 283 (2013), pp. 1433-1462,* (2013)

[11] EVANS, L. C.: *Partial differential equations*. Bd. 19. Graduate Studies in Mathematics, 1998

[12] FENG, X. ; NEILAN, M. : Vanishing Moment Method and Moment Solutions for Fully Nonlinear Second Order Partial Differential Equations. In: *Journal of Scientific Computing, Volume 38, Issue 1, pp 74–98,* (2009)

[13] FENG, X. ; NEILAN, M. : *The Vanishing Moment Method for Fully Nonlinear Second Order Partial Differential Equations: Formulation, Theory, and Numerical Analysis*. 2011.

[14] FLEMING, W. H. ; SONER, H. M.: *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Springer, 2006.

[15] GLAS, S. ; KIESEL, R. ; KOLKMANN, S. ; KREMER, M. ; LUCKNER, N. G. ; OSTMEIER, L. ; URBAN, K. ; WEBER, C. : Intraday Renewable Electricity Trading: Advanced Modeling and Optimal Control. In: *preprint,* (submitted 2018)

[16] JENSEN, M. ; SMEARS, I. : On the convergence of finite element methods for Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. (2011.)

[17] OBERMAN, A. M.: *Convergent Difference Schemes For Degenerate Elliptic And Parabolic Equations: Hamilton–Jacobi Equations And Free Boundary Problems*. Bd. 44. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

[18] PEYRL, H. ; HERZOG, F. ; P.GEERING, H. : Numerical Solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation for Stochastic Optimal Control Problems. In: *WSEAS Int. Conf. on DYNAMICAL SYSTEMS and CONTROL, Venice, Italy, (pp489-497),* (2005)

[19] SMEARS, I. : *Hamilton-Jacobi-Bellman Equations: Analysis and Numerical Analysis*. 2011.

[20] SMEARS, I. : *Discontinuous Galerkin finite element approximation of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with Cordes coefficients*, Worcester College University of Oxford, Diss., 2015

[21] STECK, S. : *Reduced Basis Method for the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation Modeling the Emission Trading System*, University of Ulm, Diss., 2015

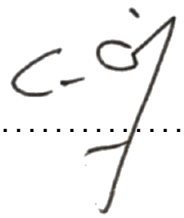
[22] YONG, J. ; ZHOU, X. Y.: *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[23] ØKSENDAL, B. : *Stochastic Differential Equations: An introduction with applications*. Sixth. Springer-Verlag, Berlin, 2013.

Name: Constantin Greif Matrikelnummer: 792873

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.



Ulm, den .....

Constantin Greif