Universität Ulm
Inst. für Num. Math.

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. Jonas Unger

Angewandte Numerik 1

Sommersemester 2012

Übungsblatt 6 - Abgabe: bis Mittwoch, 06.06.2012, 14 Uhr im Zimmer 1.04, Helmholtzstr. 20

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/sommersemester-2012/vorlesung-angewandte-numerik-1.html`

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Gegeben sei das Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2^2 \to \min$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Konditionszahl der Matrix A bzgl. der euklidischen Norm, $\kappa_2(A)$ mit Matlab.

b) Berechnen Sie per Hand $A^\top A$ exakt und die zugehörigen Konditionszahl $\kappa_2(A^\top A)$ mit Matlab. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Betrachten Sie die folgende Störung: $A^\top A + \Delta(A^\top A)$ mit

$$\Delta(A^\top A) = \begin{pmatrix} -10^{-10} & 0 \\ 0 & -10^{-10} \end{pmatrix}.$$

Wie wirkt sich dies auf die Normalengleichung aus?

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Zur Bestimmung von $\sqrt{5}$ wird die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - 5$$

berechnet. Wir untersuchen folgende Fixpunktiterationen:

$$\begin{aligned} I_1 &: \; x_k = \Phi_1(x_{k-1}), \quad \Phi_1(x) = 5 + x - x^2 \\ I_2 &: \; x_k = \Phi_2(x_{k-1}), \quad \Phi_2(x) = \tfrac{5}{x} \\ I_3 &: \; x_k = \Phi_3(x_{k-1}), \quad \Phi_3(x) = 1 + x - \tfrac{1}{5}x^2 \\ I_4 &: \; x_k = \Phi_4(x_{k-1}), \quad \Phi_4(x) = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{5}{x}\right) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass für die Funktionen $\Phi_i,\ (i = 1, 2, 3, 4)$ gilt

$$\Phi_i(x^*) = x^* \quad \Longleftrightarrow \quad (x^*)^2 - 5 = 0.$$

b) Berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 2.5$ jeweils $x_1, x_2, \ldots, x_6$.

c) Skizzieren Sie für jedes dieser Verfahren die Funktion Φ_i und stellen Sie die Fixpunktiterationen $x_k = \Phi_i(x_{k-1})$ für den Startwert $x_0 = 2.5$ graphisch dar. Erklären Sie anhand dieser Skizzen die Resultate aus b).

d) Zeigen Sie, dass das Verfahren I_4 gerade das Newton-Verfahren angewandt auf die Funktion f ist.

Aufgabe 3. Programmieraufgabe (4 Punkte)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

```
[x, k]=newton(x_0, f, Df, tol, maxit)
```

die das lokale Newton-Verfahren für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durchführt. Hierbei seien die Eingabeparameter

- `x0` der Startwert,
- `f` die zu lösende Gleichung,
- `Df` die Ableitung von f,
- `tol` die Abbruchtoleranz,
- `maxit` die maximale Iterationszahl.

Ausgegeben werden sollen ein Vektor `x`, der die Iterierten x_k enthält, und `k` die Anzahl der Iterationen. Wenden Sie Ihr Verfahren für unterschiedliche Startwerte auf die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 5$$

an.