Universität Ulm
Inst. für Num. Math.

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. Jonas Unger

Angewandte Numerik 1

Sommersemester 2012

Übungsblatt 9 - Abgabe: 28.06.2012 nach der Vorlesung

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/sommersemester-2012/vorlesung-angewandte-numerik-1.html`

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(x)\ln(x)$ und die Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.
Berechnen Sie den exakten Wert der Ableitung an der Stelle x_0 ($f'\left(\frac{1}{2}\right)$).
Berechnen Sie anschliessend numerisch die Ableitung mittels finiter Differenzen (Vorwärts- und zentrale Differenzen) für verschiedene Schrittweiten h ($h = 10^{-1},\ h = 10^{-2},\ h = 10^{-3},\ h = 10^{-4}$) und betrachten Sie den zugehörigen Fehler.

Aufgabe 2. Programmieraufgabe (4 + 4 + 4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}, -\inf < a < b < \inf$ und $h = (b-a)/n$. Wir betrachten die folgenden zusammengesetzte Integrationsmethoden:

a) *zusammengesetzte Mittelpunktsregel*

$$M_n(f) := h\sum_{j=1}^{n} f(a + (j - \frac{1}{2})h)$$

b) *zusammengesetzte Trapezregel*

$$T_n(f) := \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{j=2}^{n} f(a + (j-1)h) + f(b)\right)$$

c) *zusammengesetzte Simpsonregel*

$$S_n(f) := \frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{j=2}^{n} f(a + (j-1)h) + 4\sum_{j=1}^{n} f(a + (j - \frac{1}{2})h) + f(b)\right)$$

zur Approximation von $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$. Schreiben Sie jeweils Matlab-Funktionen zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I(f)$ mit den oben genannten Methoden:

Testen Sie Ihr Funktionen für das Integral

$$I(f) := \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\, dx = \pi$$

Beginnen Sie mit $n = 2$ und erhöhen Sie in jedem Durchlauf n um den Faktor 2, bis entweder der Fehler kleiner als 10^{-10} oder $n = 1000$ ist. Plotten Sie jeweils den absoluten Fehler, d.h. $|M_n(f) - I(f)|, |T_n(f) - I(f)|$ und $|S_n(f) - I(f)|$ gegen n.

Aufgabe 3. (4 + 4 Punkte)

a) Es sei $f \in C^1[a,b]$ und f' monoton wachsend. Zeigen Sie, dass zu jeder Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalls $[a,b]$ die mit der Trapezregel gewonnene Approximation

$$I_T(f) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) + f(x_{i-1}))(x_i - x_{j-1})$$

und die mit der Mittelpunktsregel gewonnene Näherung

$$I_M(f) := \sum_{i=1}^{n} f(\frac{1}{2}(x_i + (x_{i-1}))(x_i - x_{j-1})$$

für $\int_a^b f(x)\, dx$ den Wert des Integrals einschliessen.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Aussage aus dem Aufgabenteil a) eine obere und eine untere Schranke für $I(f_1) = \int_1^2 e^{-x^2}\, dx$ und hiermit eine Näherung für das Integral mit einem relativen Fehler von höchstens 10^{-2}.

Hinweis: Verwenden Sie Ihre entsprechenden Funktionen aus Aufgabe 2.