Kap. 1 Einführung u. Motivation

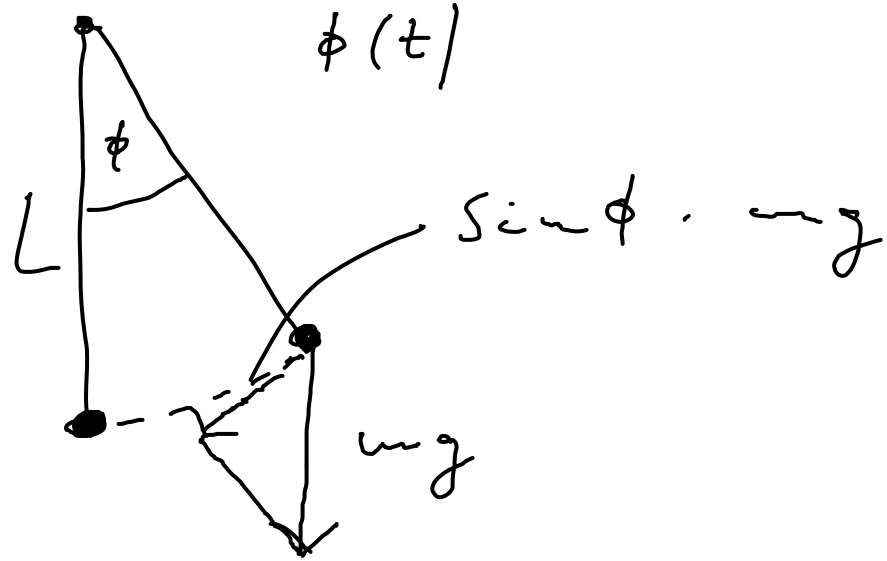
Ziele d. Vorlesung:

- Entwicklung von Verständnis und praktische Anwendung einer Toolbox numerischer Methoden
- Beurteilung von Verfahren und ihrer Resultate

  → Fehleranalyse

Lit.: Dahmen und Reusken (Homepage)

Bsp. 1.1 mathematisches Pendel



Aufgabe: bestimme Anfangsauslenkung, so dass eine vorgegebene Schwingungsperiode erreicht wird

$\phi(0)$

Konstruiere mathemat. Modell:
(Idealisierung)

- ungedämpfte Schwingung
- Punktmasse
- Newton-Mechanik

Pendel-Modell: Differenzialgleichung

$$m \cdot L \cdot \ddot{\phi}(t) = -mg \sin\phi \qquad (1.2)$$

$$\phi(0) = \phi_0 \,, \quad \dot{\phi}(0) = 0 \qquad (AWA)$$

Anfangswert-aufgabe

Fehlerbetrachtung:

$\longrightarrow$ Modellfehler (Idealisierung)

$\longrightarrow$ Datenfehler durch Messung von L, m, (g)

Sei $\phi(t; \phi_0)$ die Lsg. der AWA (1.2),

damit wird die Schwingungsdauer $T(\phi_0)$ eine Funktion von ϕ_0.

Suche ϕ_0^* mit $T(\phi_0^*) = 1.8$.

Symmetrie d. Bewegung:

$$\phi\left(\frac{T}{4}, \phi_0\right) = 0$$

zu lösen: „Nullstellenproblem"

$$\phi\left(\frac{1.8}{4}, \phi_0\right) = 0$$

zur numerischen Lsg. muss

$\phi(t, \phi_0)$ auswertbar sein, evtl.

benötigt: $\frac{d\phi}{d\phi_0}(t, \phi_0)$.

Nullstellenbestimmung:

- numerisch mit Näherungsverfahren
  (→ Verfahrensfehler)
- Rundungsfehler (endliche Zahldarstellung im Rechner)

Fehlerbetrachtung:

- Kondition des Problems
  (wie beeinflüssen Fehler in den Daten das Resültat)
  → probleminhärente Eigenschaft
  (ünvermeidbarer Fehler!)

- Stabilität des nümerischen Verfahrens (wie güt „verstärkt" sich die Kondition des Problems auf den nümerischen Lsg. algorithmüs

– Effizienz des numer. Verfahrens (Zahl der Rechenschritte..)

Kap. 2 Fehleranalyse

Formalisierung des zu lösenden Problems:

Abbildung $f : X \longrightarrow Y$

$f(x_0)$ Auswertung (numer. Verfahren)

Bsp. 2.1

Schnittpunkt zweier Geraden

löse $Ay = x$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

als Fkt. von $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

falls $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow A$ ist regulär (invertierbar) $\Longrightarrow y = A^{-1}x$

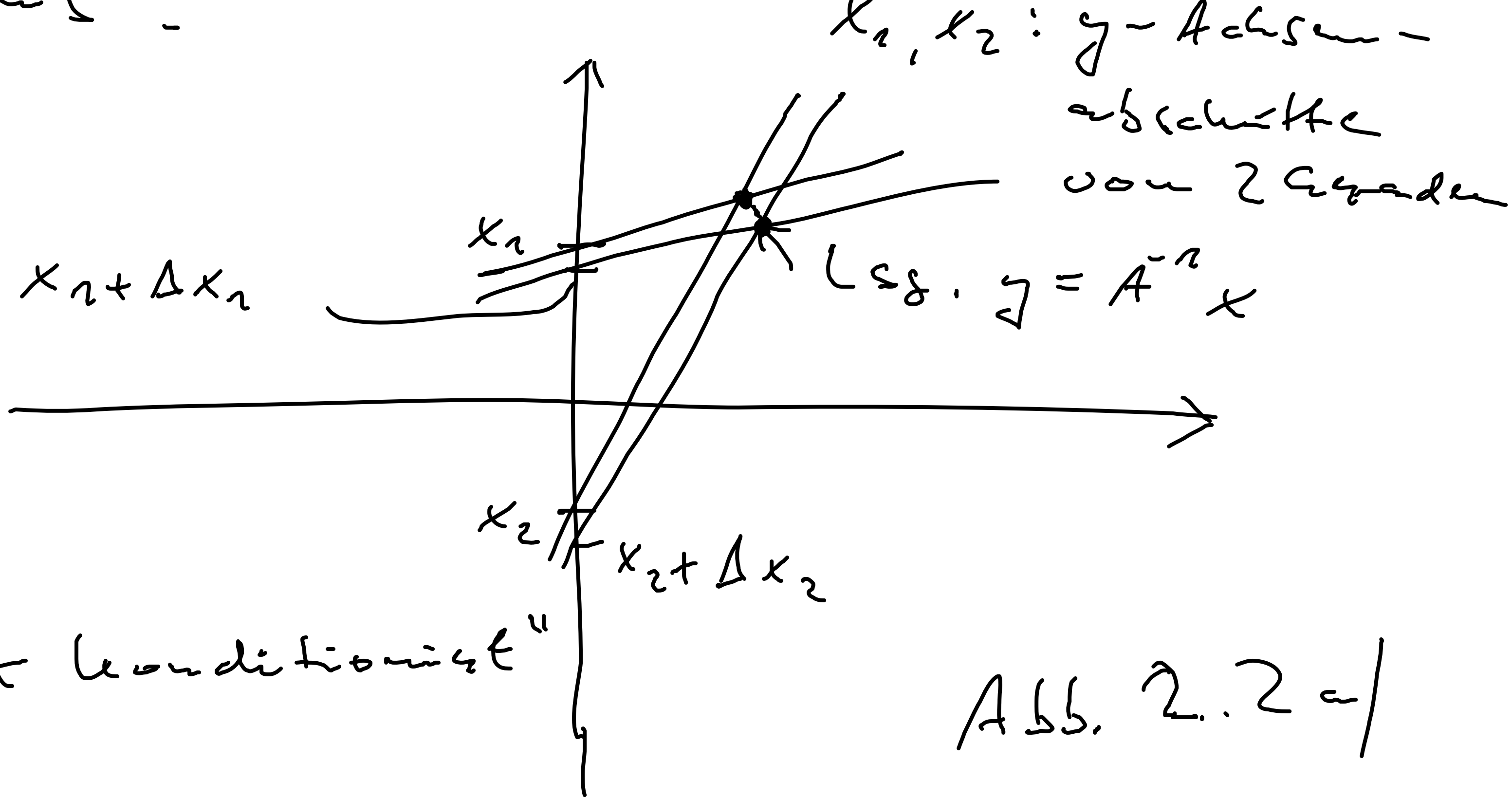
$f(x) := A^{-1}x \quad , \quad X = \mathbb{R}^2 = Y$

$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = x_1, \quad a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = x_2$

Lsg. Schnittpunkt zweier Geraden

Kondition des Problems (d. Abb. f):

wie wirken sich Störungen in x auf das Resultat $y = f(x) = A^{-1}x$ aus?



„gut konditioniert"

Abb. 2.2 a)

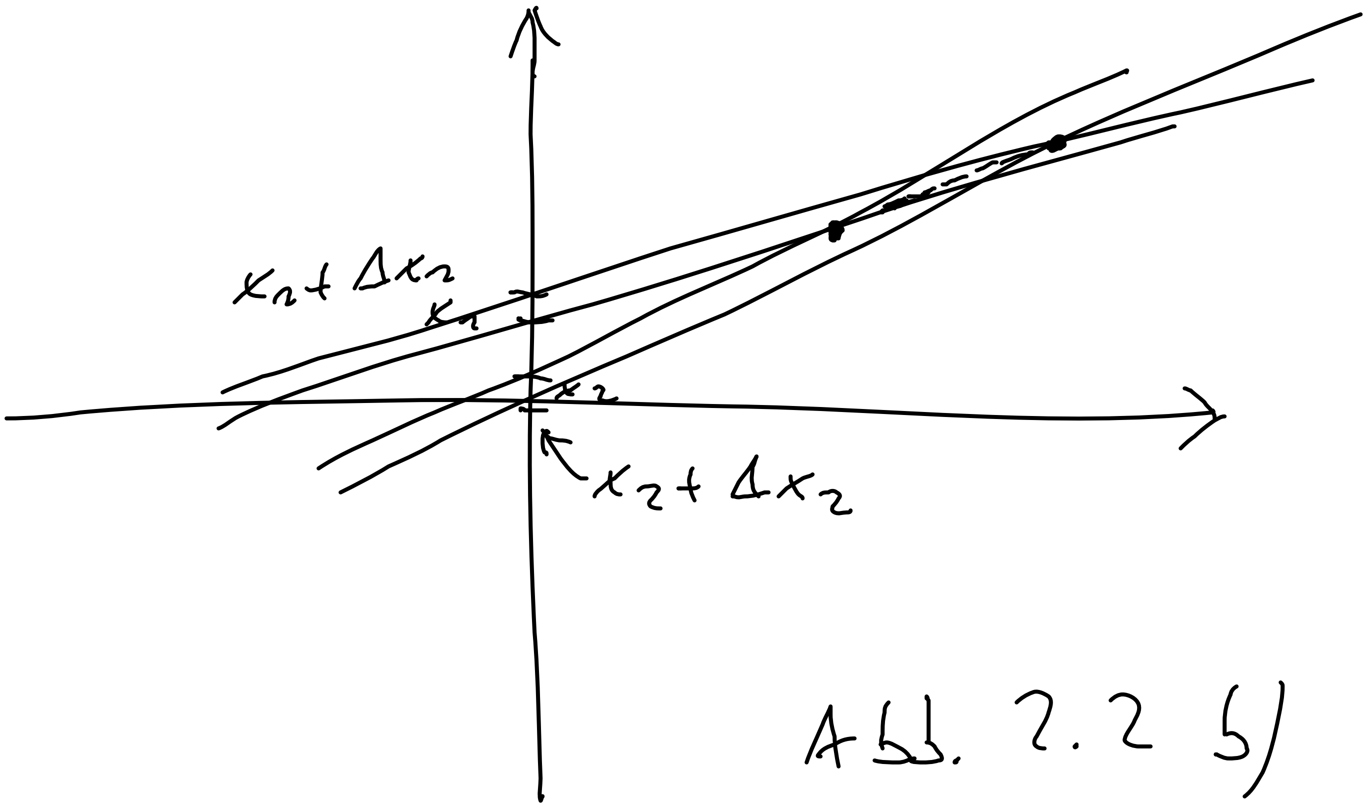


Abb. 2.2 b)

„Schlecht konditioniert"

Mathematisierung dieser Konzepte:

a) Vergleich gestörter (≠) exakte Daten (Differenzbildung)

b) Messung von Fehlern (Längen)

a) + b) führen zum Konzept des normierten Vektorraums

Def. 2.3 Norm

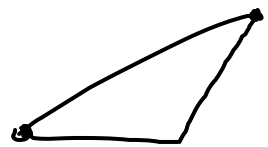
Abbildung $\|\ \|: V \to \mathbb{K}$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ($\mathbb{K}: \mathbb{R}, \mathbb{C}$) mit

a) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$

$\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \ \lambda \in \mathbb{K}, \ v \in V$

c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \ v, w \in V$



(Dreiecksungleichung)

Def. 2.4 Lipschitz-Stetigkeit

$(V, \| \ \|_V)$, $(W, \| \ \|_W)$ normierte Vektorräume. Abb. $f: V \to W$ heißt Lipschitz-stetig, falls es $L \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\| f(v) - f(w) \|_W \leq L \cdot \| v - w \|_V$$

$\to$ Maß für die absolute Kondition eines Problems (L: Lipschitz-Konstante)

Aus Def. 2.3 c) folgt

$$\big| \|v\| - \|w\| \big| \leq \| v - w \|$$

Lipschitz-Konstante $L = 1$!

Beispiele für Normen und normierte Räume:

$$(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty) : \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

$$(C(I), \|\ \|_\infty) : \quad \|f\|_\infty := \max_{t \in I} |f(t)|$$

$$f \in C(I) := \{ f : \underset{(\subset \mathbb{R})}{I} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}$$

$$I = [a, b]$$

I kompakt (beschränkt und abgeschlossen)

$$(\mathbb{K}^n, \|\ \|_p) :$$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\left(C(I), \|\ \|_p\right): \quad \|f\|_{L^p(I)} := \left(\int_I |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$$

$$f \in C(I)$$

Spezialfall „Euklidische Norm"

$$\|x\|_2 := \langle x, x\rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\langle x, y\rangle := x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

analog. für $f, g \in C(I)$

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(t) \cdot g(t) \, dt$$

zwei Fkt. f, g orthogonal, falls

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Unterschiedliche Normen „messen" Abstände unterschiedlich.

∞-Norm: 2 Punkte haben kleinen Abstand, wenn alle Vektor-komponenten kleinen Abstand haben

2-Norm: „quadrat. gemittelter Abstand"

→ erlaubt durchaus „größere" Abstände zwischen einzelnen Vektorkomponenten, die dann Komponenten „kompensiert" werden können

Vergleich von Normen

Satz 2.5 Normäquivalenz

Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum und $\| \ \|_a$, $\| \ \|_b$ zwei Normen auf V.

Dann gibt es Zahlen $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1 \|v\|_a \leq \|v\|_b \leq c_2 \|v\|_a$$

(äquivalente Normen) für alle $v \in V$

2 Normen sind umso „ähnlicher", je kleiner $\frac{c_2}{c_1}$ ist $\left(\frac{c_2}{c_1} \geq 1\right)$

Für $\| \ \|_\infty$ und $\| \ \|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt

$$1 \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

d.h. c_2 hängt von Dimension ab!

wichtig bei Diskretisierungsproblemen (z.B. Differentialgleichungen)

$\longrightarrow$ Fazit: Wahl der Norm spielt wichtige Rolle!

§2.1 Konditionszahlen linearer Abbildungen

$(X, \| \|_X)$, $(Y, \| \|_Y)$ normierte Räume

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

$\mathcal{L}$: linearer Operator

ist $Y = \mathbb{K}$, dann heißt $\mathcal{L}$
lineares Funktional

Bsp. 2.6

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^{m+1} \to \Pi_m := \left\{ \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{L}(a) := \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \, , \quad a \in \mathbb{R}^{m+1}$$

ist lin. Operator vom $\mathbb{R}^{m+1}$ in
den Raum der Polynome vom Grad m.

Bemerkung 2.7

Lineare Abb. zwischen endlich-dim. Vektorräumen können durch Matrizen beschrieben.

Ziel: Charakterisiere das Abb. verhalten von $\mathcal{L}$

Def 2.8 (Operatornorm)

$$\mathcal{L} : (X, \| \ \|_X) \longrightarrow (Y, \| \ \|_Y)$$

$$\|\mathcal{L}\| := \sup_{\|x\|_X = 1} \|\mathcal{L}(x)\|_Y$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\| \mathcal{L}(x) \|_Y}{\| x \|_X} =$$

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \| \mathcal{L}(x) \|_Y$$

„Maß" für die Verformung der „Einheitskugel unter der Abb. $\mathcal{L}$.