§ 8.3 Extrapolation, Romberg-Quadratur

Idee: Berechne Quadratur für verschiedene Schrittweiten h und extrapoliere auf $h = 0$.

Grundlage: asymptotische Fehlerentwicklung existiert

z.B. für Trapezregel:

$$T(h) - \int_a^b f(x)\,dx = c_1 h^2 + c_2 h^4 + \dots + c_p h^{2p} + O(h^{2p+2}) \quad (8.23)$$

mit Koeffizienten c_i unabhängig von h

Extrapolation:

Seien $m+1$ Schrittweiten $h_0 > h_1 > \ldots > h_m > 0$

(z.B. $h_0 > 0$, $h_i := \frac{h_0}{2^i}$, $i = 1, \ldots, m$

(Romberg-Folge)

Berechne für jedes h_i den Wert $T(h_i) =: T_{i0}$

mit der summierten Trapezregel (P4).

Sei $\tilde{T}_{mm}(h)$ das Interpolationspolynom

in der Variablen $x = h^2$, also es gelte

$$\tilde{T}_{mm}(h) = a_0 + a_1 h^2 + \ldots + a_m h^{2m}, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{T}_{mm}(h_i) = T(h_i) = T_{i0}, \quad i = 0, \ldots, m$$

Der Wert $\tilde{T}_{mm}(0)$ für die Schrittweite $h = 0$ ist verbesserte Näherung für

$\int_a^b f(x)\,dx \approx a_0$, denn es gilt

wegen (8.23)

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} T(h) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(„Extrapolation" auf „Schrittweite 0)

Beispiel 8.25

$h_0 = b - a, \quad h_1 = \frac{h_0}{2}, \quad n = 1$

Berechne $T_{11} := \tilde{T}_{11}(0) = l_{01}(0) \cdot T(h_0)$

$$+ \, l_{11}(0) \cdot T(h_1)$$

mit l_{j1} $(j = 0,1)$ aus Satz 7.2

(Lagrange-Interpolationspolynom)

$$l_{j1} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{1} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad x = h^2, \quad x_j = h_j^2$$

$$\xrightarrow[x=h^2=0]{} \quad l_{01}(0) = \frac{0-h_1^2}{h_0^2-h_1^2} = -\frac{1}{3}$$

$$l_{11}(0) = \frac{0-h_0^2}{h_1^2-h_0^2} = \frac{4}{3}$$

also

$$T_{11} = \tilde{T}_{11}(0) = -\frac{1}{3}T(h_0) + \frac{4}{3}T(h_1)$$

$$\underset{(8.4)}{=} -\frac{1}{3}\,\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \frac{4}{3}\,\frac{b-a}{2}\cdot \left(\frac{f(a)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{2}\right) =$$

$$\frac{h_1}{3}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$= S(h_0)$$ [Simpson-Regel s. Tab. 8.13]

D.h. die extrapolierte Trapezregel mit Romberg-Folge (für Schrittweite) liefert die Simpson-Regel.

<u>Allgemein:</u>

Berechne $T_{mm} := \tilde{T}_{mm}(0)$ mit Aitken-Neville (7.5) und $x_{i-k} = h_{i-k}^2$, $x_i = h_i^2$

$1 \leq k \leq i \leq m$

Sei $\tilde{T}_{ik}(h)$ das Polynom in der Variablen

$x = h^2$, für das gilt

$$\tilde{T}_{ik}(h_j) = T(h_j), \quad j = i-k, \dots, i$$

Mit (7.4) folgt für $T_{ik} := \tilde{T}_{ik}(0)$

mit $x_j = h_j^2$ und $x = 0$:

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left(\frac{h_{i-k}}{h_i}\right)^2 - 1} \qquad (8.26)$$

$$1 \le k \le i \le m$$

Schema 7.5 liefert damit

$$
\begin{array}{c|cccc}
h_0 & T_{00} = T(h_0) & & & \\
 & & T_{11} & & \\
h_1 & \vdots & & T_{22} & \\
 & & T_{21} & & T_{33} \\
h_2 & \vdots & & T_{32} & \\
 & & T_{31} & & \\
h_3 & T_{30} = T(h_3) & & &
\end{array}
$$

spezielle Romberg-Folge $h_i = \dfrac{h_0}{2^i}$, $i = 0, 1, \ldots$

gilt in (8.26)

$$\left(\frac{h_{i-k}}{h_i}\right)^2 - 1 = \boxed{2^{2k} - 1}$$

Rekursion liefert also

$k=1$: $$T_{i1} = T_{i0} + \frac{T_{i0} - T_{i-1,0}}{3}$$

$k=2$: $$T_{i2} = T_{i1} + \frac{T_{i1} - T_{i-1,0}}{15}$$

<u>Beispiel 8.27</u>

Berechne $\int_0^1 e^x \, dx = e - 1 = 1.718281828$ (9 Nachkommastellen)

h_i	T_{i0}	T_{i1}	T_{i2}
1	1.859140914		
1/2	1.753931092	1.718861251	
1/4	1.727221904	1.718318841	1.718281587
1/8	1.720518592	1.718284155	1.718281842

$$T_{33} = 1.718281820$$

Bemerkung 7.28

Vorteil der Extrapolation:

Sukzessive Erhöhung der Genauigkeit unter Verwendung vorher berechneten Größen möglich. Bei der Gauss-Quadratur muß alles neu berechnet werden.

Kap. 9 Fourier-Transformation und trigonometr. Interpolation

Motivation: In vielen Anwendungen spielen period. Vorgänge eine wichtige Rolle. Wähle daher ggf. period. Fkt. als Basis der Interpolation. (anstelle von Polynomen)

Erinnerung Euler-Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Sei $\varepsilon_n := e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ die sog. n-te Einheitswurzel, d.h.

$$(\varepsilon_n^j)^n = \varepsilon_n^{j\cdot n} = 1, \quad j = 0, \dots, n-1$$

Verwende als Basissystem für die Interpolation

$$T_n := \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijx} \;\middle|\; c_j \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{span}\left\{ e_j \;\middle|\; 0 \le j \le n-1 \right\} \quad (3.1)$$

mit $e_j(x) = e^{ijx}$ (Basisfunktionen)

Auch für $\mathcal{T}_m$ gilt:

Lagrange-Interpolationsproblem 7.1 ist eindeutig lösbar (vgl. Fundamentalsatz der Algebra).

(9.2) Sei $x_k := \dfrac{2\pi k}{n}$. Finde für Fkt. f

$T_n \in \mathcal{T}_m$, so dass gilt

$$T_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n-1$$

(Lagrange-Interpolationsproblem)

Trigonometr. Interpolation

Die Lösung dieser Interpolationsaufgabe ist eng verknüpft mit der Fourier-Transformation.

§9.1 Fourier-Reihen

<u>Ziel</u>: „Zerlegung" eines period. Vorgangs in seine „Grundkomponenten" (Schwingungsmoden)

Wähle den Funktionenraum

$$L_{2,2\pi} := \left\{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx < \infty,\ f(0) = f(2\pi) \right\}$$

Zur Erinnerung $\overline{\cdot}$: komplexe Konjugation

d.h. $z = x + iy \in \mathbb{C} \to \overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

definiert ein Skalarprodukt auf dem Raum $L_{2,2\pi}$ und

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$ definiert eine Norm (s. Kap. 2).

Für die Funktionen $e_j(x)$ aus (9.1) gilt:

$$\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-ikx} \, dx$$

$$= \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \qquad j, k \in \mathbb{Z}$$

d.h. e_j bilden ein Orthonormal-system bzgl. $\langle \, , \, \rangle$.

Die Basisdarstellung einer Fkt.

$f \in L_{2,2\pi}$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} \qquad (9.4)$$

heißt Fourier-Reihe von f.

$$\hat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

(Fourier-Koeffizienten) (9.5)

mit Basisfunktionen $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

sind die „Koordinaten" von f bezgl. dieser Basis: $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$

Die Abbildung

$$f(x) \longmapsto \hat{f}(k), \; k \in \mathbb{Z}$$

heißt Fourier-Transformation.