Die Lösung dieser Interpolationsaufgabe ist eng verknüpft mit der Fourier-Transformation.

§9.1 Fourier-Reihen

<u>Ziel</u>: „Zerlegung" eines period. Vorgangs in seine „Grundkomponenten" (Schwingungsmoden)

Wähle den Funktionenraum

$$L_{2,2\pi} := \left\{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx < \infty,\ f(0) = f(2\pi) \right\}$$

Zur Erinnerung $\overline{\cdot}$: komplexe Konjugation

d.h. $z = x + iy \in \mathbb{C} \to \bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

definiert ein Skalarprodukt auf dem Raum $L_{2,2\pi}$ und

$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ definiert eine Norm (s. Kap. 2).

Für die Funktionen $e_j(x)$ aus (9.1) gilt:

$$\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-ikx} \, dx$$

$$= \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \qquad j, k \in \mathbb{Z}$$

d.h. e_j bilden ein Orthonormalsystem bzgl. $\langle \ , \ \rangle$.

Die Basisdarstellung einer Fkt.

$f \in L_{2,2\pi}$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \, e^{ikx} \qquad (9.4)$$

heißt Fourier-Reihe von f.

$$\hat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

(Fourier-Koeffizienten) $\qquad (9.5)$

mit Basisfunktionen $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sind die „Koordinaten" von f bzgl. dieser Basis: $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$

Die Abbildung

$$f(x) \longmapsto \hat{f}(k), \ k \in \mathbb{Z}$$

heißt Fourier-Transformation.

Fourier-Summe:

$$S_n(f;x) := \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} \qquad (9.6)$$

ist Näherung an f.

Sei $U_{2n+1} := \mathrm{span}\{e_k \mid |k| \leq n\}$.

Dann gilt

$$\|f - S_n(f;x)\|_2 = \min\{\|f-\bar{u}\| \mid \bar{u} \in U_{2n+1}\}$$

(„Bestapproximation") $\qquad (9.7)$

Wg. (9.3) gilt

$$\|S_n(f;x)\|_2 = \left(\sum_{|k|\leq n} |\hat{f}(k)|^2\right)^{1/2}$$

und mit (9.4) folgt:

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \qquad (9.8)$$

(„Plancherel-Identität")

(9.8) besagt, dass die Fourier-Transformation eine sog. Isometrie ist, also eine Abbildung, die „die Norm erhält".
Denn im Bildraum der Fourierkoeffizienten

$\hat{f}(k)$ ist die entsprechende Norm

$$\|y\|_2 := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

§ 9.2 Trigonometr. Interpolation

Betrachte Problem (9.2):

Sei $x_k = \frac{2\pi k}{n}$. Finde $T_n \in \mathcal{T}_n$

mit $T_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n-1$

Satz 9.9

Für $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$ gilt mit

$$d_j(f) := \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(x_l)\, \varepsilon_n^{lj}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(x_l)\, e^{-ijx_l}$$

und $$T_n(f;x) := \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f)\, e^{ijx} \quad (9.10):$$

$$T_n(f;x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n-1$$

löst also Aufg. (9.2).

Beweis: Es gilt

$$(*) \quad \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{i 2\pi m j}{n}} = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & , m = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

da

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{i 2\pi \cdot 0 \cdot j}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} 1 = 1$$

$(m = 0)$

und für $m = 1, \dots, n-1$

$$\left(e^{-\frac{i 2\pi m j}{n}} \right)^n = e^{-i 2\pi m j} = \cos(2\pi m j) - i \sin(2\pi m j) = 1, \text{ d. h.}$$

$$\underbrace{\left(e^{-\frac{i2\pi m j}{n}}\right)^n - 1}_{= \left(w_j^n - 1\right)} = 0$$

$$= \left(w_j^n - 1\right) = 0$$

mit $w_j := e^{-\frac{i2\pi m j}{n}}$

d.h. die w_j sind Nullstellen des Polynoms $w^n - 1 = (w-1)\cdot\left(w^{n-1} + w^{n-2} + \ldots + 1\right)$

d.h. entweder ist $w_j = 1$ (Fall $m = 0$) s.o.

oder $\sum_{j=0}^{n-1} w_j = 0$ (Fall $m = 1, \ldots, n-1$)

also gilt (*)

Einsetzen der Formel für $d_j(f)$ in (9.10) liefert:

$$T_n(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{n-1} f(x_l) e^{-\frac{2\pi j l}{n}} \right) \cdot$$

$$e^{\frac{i 2\pi j k}{n}} = \sum_{l=0}^{n-1} f(x_l) \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{i 2\pi j (l-k)}{n}} \right)$$

$$\underset{(\text{mit } (*))}{=} \sum_{l=0}^{n-1} f(x_l)\, \delta_{0,l-k} = f(x_k)$$

$$\text{mit } \delta_{0,l-k} := \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & \text{sonst}, \ l \neq k \end{cases}$$

Darstellung in Satz (3.9) ist eindeutig wg. linearer Unabhängigkeit der Basisfunktionen e^{ijx}.

$d_j(f)$ heißen diskrete Fourierkoeffizienten und

$$d(f) := \left(d_0(f), \dots, d_{n-1}(f)\right)^T$$

heißt diskrete Fouriertransformation (der Länge n) von f.

Mit dem Skalarprodukt auf dem Raum T_n

$$\langle v, w\rangle_n := \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} v(x_l)\,\overline{w(x_l)} \qquad (9.11)$$

erhält man in Satz 9.9 die Darstellung

$$d_j(f) = \langle f, e_j\rangle_n = \langle T_n(f;x), e_j\rangle_n$$

in Analogie zu (9.5).

<u>Lemma 9.12</u>

Für $e_j(x) = e^{ijx}$ gilt

$$\langle e_j, e_k\rangle_n = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$0 \leq j,k \leq n-1$

D.h. $(e_j)_{0\leq j\leq n-1}$ bilden auch auf $\mathcal{T}_n$ bzgl. $\langle\, ,\, \rangle_n$ aus (9.11) ein Orthonormalsystem und es gilt

$$\langle T_n(f;x),\, e_j\rangle_n = d_j(f) = \langle f, e_j\rangle_n \qquad (9.13)$$

__Bemerkung 9.14__

(9.13) bedeutet, dass $T_n(f;x)$ die Orthogonalprojektion von f auf $\mathcal{T}_n$ bzgl. $\langle\, ,\, \rangle_n$ ist.

Reelle trigonometr. Interpolation

Für reelle $f(x_k)$ ist Interpolationspolynom $T_n(f;x)$ als Lösung von Aufg. (9.2) i.a. komplex (s. Satz 9.3).

Um ein reelles Polynom zu erhalten kann man

$$\tilde{\mathcal{T}}_{2p+1} := \left\{ \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) \;\middle|\; \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \right\} \quad (9.15)$$

wählen (Motivation: Euler-Formel)

(9.16) Reelle trigonometr. Interpolationsaufgabe:

Sei $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, $f(x_k) \in \mathbb{R}$

$k = 0, \ldots, n-1$ $\qquad n = 2p+1$

Finde $\hat{T}_n \in \hat{\mathcal{T}}_n$, s.d. dass

$$\hat{T}_n(x_k) = f(x_k) \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Satz 9.17

$$\hat{T}_n(f;t) = \frac{1}{2}A_0(f) + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(A_j(f)\cos jt + B_j(f)\sin jt\right)$$ löst Aufg. (9.16)

mit

$$A_0(f) := \sqrt{2}\,\langle \hat{T}_n, \phi_0 \rangle_n = \frac{2}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(x_\ell)$$

$$A_j(f) := \langle \hat{T}_n, \phi_j \rangle_n = \frac{2}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(x_\ell)\cos jt$$

$$B_j(f) := \langle \hat{T}_n, \psi_j \rangle_n = \frac{2}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(x_\ell)\sin jt$$

$$\phi_j(x) := \mathrm{Re}(e_j(x)) = \cos jx \qquad j \geq 1$$

$$\psi_j(x) := \mathrm{Im}(e_j(x)) = \sin jx \qquad j \geq 1$$

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Beweis: Analog zu Satz 9.9

§ 9.3 Schnelle Fouriertransformation (FFT)

Die diskrete Fouriertransformation ist eine Abbildung von n-period. Folgen $y = (y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ mit $y_{j+n} = y_j$ (Daten $f(x_j)$)

in n-period. Folgen $d(y)$ (diskrete Fourierkoeffizienten).

Für $(y_j)_{j=0}^{n-1}$ betrachte die Abbildung

$$F_n : y \longmapsto d = d(y) = (d_1(y), \dots, d_n(y))$$

$$d_j(y) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell \left(\varepsilon_n^j\right)^\ell = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell \, e^{-2\pi i j \frac{\ell}{n}}, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{9.18}$$

- F_n ist invertierbar und für $F_n^{-1} : d \mapsto y$ gilt

$$(F_n^{-1} d)\Big|_j = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \, \varepsilon_n^{-jk} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k \, e^{\frac{2\pi i jk}{n}} \qquad j \in \mathbb{Z}$$

- F_n ist linear und mit

$$\hat{F}_n := \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_n^{1} & \cdots & \varepsilon_n^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e_n^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

gilt $\qquad \hat{F}_n\, y = d$

(„Matrixdarstellung" d. lin. Abbildung)

Offensichtlich ist (9.18) äquivalent zur trigonometr. Interpolation (Satz 9.9)

<u>Bemerkung</u> <u>9.20</u>

Die Matrix $\hat{F}_n$ aus (9.19) ist (bis auf Skalierung) unitär, denn wegen Lemma 9.12 gilt $\hat{F}_n \hat{F}_n^* = n \cdot \underline{I}$

($\hat{F}_n^*$: adjungierte Matrix)