Beweisung 2.7

Linearer Abb. zwischen endlich-dim. Vektorräumen können durch Matrizen beschrieben.

Ziel: Charakterisieren des Abb. Verhalten von Y

Def 2.8 (Operatornorm)

\[ Y : (x, \|x\| \rightarrow (\gamma, \|y\|) ) \]

\[ \|y\| = \sup \| y(x) \| \gamma \]

\[ \|x\|_x = 1 \]
\[ = \sup_{x \neq 0} \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} = \sup_{\| x \| \leq 1} \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} \]

"Rap" für die Verformung der Einheitskugel unter der Abb. 1.
Satzung 2.9

Ein linearer Operator ist beschränkt genau dann wenn stetig.

\[ \| Y (x_2) - Y (x_1) \| \leq \| Y \| \cdot \| x_2 - x_1 \| \]

\[ \| x_2 - x_1 \| \leq (\text{Lipschitz-stetig}) \]

\( Y \) beschränkt, falls \( \| Y \| \text{ endlich} \)
Für \( X = \mathbb{R}^m \), \( Y = \mathbb{R}^n \) und die
\( Y \)-repräsentierende Matrix
\( B \in \mathbb{R}^{m \times n} \) berechnet man:

\[
\|B\|_{\infty \rightarrow 1} = \max_{i=1, \ldots, m} \sum_{k=1}^{n} |b_{ki}|
\]

(Unten sammeln norm)

\[
\|B\|_{1 \rightarrow \infty} = \max_{i=1, \ldots, m} \sum_{k=1}^{n} |b_{ki}|
\]

(Spartensammeln norm)
\[ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \]
\[
\|A\|_2 = \sqrt{2 \max (A^T A)}
\] (Spectral norm)

Relative Kondition:

\[ \text{Ziel: Schätzen } \frac{\|y(x') - y(x)\|_2}{\|y(x')\|_2} \]

durch \[ \frac{\|x' - x\|}{\|x\|} \]
Satz 2.10 (rel. konditionstreu)

Für injektives $f$ gilt

$$
\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|f(x)\|} \leq \max \left(\frac{\|x - y\|}{\|x\|}, \frac{\|x - y\|}{\|y\|}\right)
$$

mit $\max \left(\frac{\|x - y\|}{\|x\|}, \frac{\|x - y\|}{\|y\|}\right)$
Ist $L$ bijektiv gilt

$$\|L^*L\| = \|L\| \cdot \|L^{-1}\|$$

Beispiel 2.11 (Kondition einer Basis)

Sei $V$ n-dimensionalaler Vektorraum und $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ eine Basis von $V$. (z. B. Polynomraum)

$L : \mathbb{R}^n \rightarrow V$, $L(a) := \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j$
Da \( F \) Basis ist \( L \) bijektiv.

\[ \text{Koditionszahl der Basis} \]

\[ 1^2 \]

Bemerkung 2.12

1) \( L \) hängt von der Wahl der Norm ab.

2) Falls \( L \) beschränkt ist, ist \( L \) auch für injektives (und nicht surjektives) \( f \) definiert.
da ist \( \|X(t)\|_2 \neq 0 \), dann \( \|X\|_2 = 1 \)

\( Y(t) \) gilt mit für \( t = 0 \).

Anscheinende Bedeutung:

\( Y : \) Verhältnis von Dehnung zu maximalem Flächendruck. Ständige Einheitsleistung unter der Abb. 2 gemessen in der Bielschowsky-Norm \( \|Y\|_2 \).
Abb. 2.13 (Condition)
Beispiel 2.14 (Matrixkondition)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ invertierbar

$\|X_p(A)\| = \| A \|_p \| A^{-1} \|_p \ (2.14)$

$p = 1, \ldots, \infty$

Schmittpunkt von Geraden in der Ebene (s. Bsp. 2.1.5)

\[ \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.992 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.995 \\ 4.003 \end{pmatrix} \]
Lsg. ist $x = \left( \frac{\cdot}{\cdot} \right)$. Betrachte "Datenstörung" in $b$:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = A^{-1} \bar{b}$$

Man berechnet

$$A^{-1} = -\frac{\Lambda}{0.015} \begin{pmatrix} 1.957 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.4004 \\ 0.1 \end{pmatrix}$
in der $\| \cdot \|_{\infty}$ - Norm gilt:

\[
\frac{\| \bar{y} - y \|_{\infty}}{\| y \|_{\infty}} \approx 7.5 \cdot 10^{-4} \quad (\text{Datenstörung})
\]

\[
\frac{\| x - x \|_{\infty}}{\| x \|_{\infty}} = 1.8 \quad (\text{Risikotoleranz})
\]

Sowie

\[
\mathcal{E}(A) = \| A \|_{\infty} \cdot \| A^{-1} \|_{\infty} \approx 4.738.7
\]
3) Ist $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ und ein nichtlineares $f : X \to Y$, das differenzierbar ist, gilt:

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \leq \|f'(x)\|_{\infty} \cdot \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{x_j - x_j^*}{x_j} \right| \leq 3 \|f'(x)\|_{\infty} \cdot \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$$
\[ J_{200}(x) = \max_{j=1, \ldots, n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x_j)} \right| \]

(das sieht man mit Hilfe von Taylorentwicklung 1. Ordnung)

**Kondition der Addition**

\[ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) := x_1 + x_2 \]

\[ \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)} = \frac{x_j}{x_1 + x_2}, \quad j = 1, 2 \]
\[ K_{oo} (\zeta) = \max \left\{ \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right|, \left| \frac{x_2}{x_2 + x_2} \right| \right\} \]

(2.15)

Haben \( x_1, x_2 \) gleiche Vorzeichen:
\[ K_{oo} (\zeta) \leq 1 \]

Falls \( x_1 \neq -x_2 \), so kann
\[ K_{oo} (\zeta) \) sehr groß werden! \)

(s. Auslöschung in Kap. 3)
Kap. 3  Numerische Zahlendarstellung

und Gleitpunktarithmetik

Darstellung einer reellen Zahl

\[ x = \pm \left( \sum_{j=1}^{\infty} d_j 5^{-j} \right) \cdot 5^e \ (3.1) \]

wähle \( e \) so, dass \( d_1 \neq 0 \)

Rechnerdarstellung ist und die
(Raschienzahlen)

→ normisierte Gleitpunktarstellung

\[ x = f \cdot 10^e \]
5: Grundzahl (Basis) des gewählten Zahlensystems (z.B. dezimal, binär)

\[ 1 \leq c \leq R \quad (\text{Exponent}) \]

\[ f : + 0.0. \ldots \text{d} \quad \text{dn} \]

\[ d_j \in \{0,1, \ldots, b-1\} \]

\[ f : \text{Nulltisse} \]

\[ \text{m} : \text{Nulltissenlänge} \]

Reduziert verarbeitet weitere Tabelle über Reduktionsabbildung
\[ f_k : \mathbb{R} \to M(b, +, \cdot, \mathbb{R}) \]

Randbedingung:
\[ f_k(k) = \begin{cases} \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot b^j \right) \cdot b^k \quad d_{m+n} \leq \frac{b}{2} \\ \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot b^j + b^{-m} \right) \cdot b^k \quad d_{m+n} \geq \frac{b}{2} \end{cases} \]

\[ \rightarrow \text{kleinste mögliche Zahl} \]
\[ x_{\text{min}} = 0.1000... \cdot b^k = b^{k-1} \]

\[ \rightarrow \text{größte mögliche Zahl} \]
\[ x_{\text{max}} = 0.aaa... \cdot b^k = (1 - b^{-m}) / b \]
\[ a = \frac{b}{2} - 1 \]
\(|x| < x_{\text{min}} \rightarrow f(x) = 0\)

\(|x| > x_{\text{max}} \rightarrow f(x) = \infty \text{ (overflow)}\)

\[|f(x) - x| \leq \frac{b^m}{2} b^e \quad \text{(absolute)}\]

(3.2)

\[\left| \frac{f(x) - x}{x} \right| \leq \frac{b^m}{2} b^e = \frac{b^{1-m}}{2} (\text{relative})\]

\[\text{PS: } = \frac{b^{1-m}}{2} \text{ (Machine range}} = c_d (\text{relative})\]
\[ \varepsilon \in \mathbb{F} \exists \delta > 0 \mid f(t + \delta) > 1 \]

Für \( |t| \leq \varepsilon \) gilt

\[ f(t) = x(1 + \varepsilon) \] (3.3)

§ 3.1 Gleitpunktarithmetik

Algorithmus: "Folge arithmetischer Operationen". Verknüpfung von Maschinenzahlen liefert nicht notwendig wieder eine Maschinenzahl.
Beispiel: \[ b = 16, \quad m = 3 \]

\[ 0.346 \cdot 10^2 + 0.785 \cdot 10^2 = 0.113 \cdot 10^3 + 0.113 \cdot 10^3 \]

Ersetzte die übrigen arithmetischen Operationen durch Gleitpunktoperationen (Pseudoarithmetik). \( \Box \)

\[ \forall \in \{+, -, \times, \div, 3\} \]

Führe über die tiefsten Kuppen hinweg weitere Stellen mit genauer Rechnung.
\[ x \Box g = f \wedge (x \lor y) \quad (3.4) \]

\[ w \lor z \] (3.3) \quad \text{Anmerkung:}

\[ x \Box g = (x \lor y) \lor (y + z) \]

Eigenschaften:

\( (3.4) \) nicht mehr gültig für eine Sequenz von Operationen
- Assoziativität und Distributivität

glehen verloren

Bsp. \( b = 10, m = 3 \)

Nach dem Schema \( x = 0.653 \cdot 10^4 \)

\( y = 0.100 \cdot 10^7 \)

\( z = 0.400 \cdot 10^7 \)

\( (x + y) + z = (y + z) + x = 6535 \) (exakt)

\( x + y = 0.653 \cdot 10^4 \)

\( (x + y) \oplus z = 0.653 \cdot 10^4 \)
\[ a_2 : \]

\[ y \oplus z = 0.500 \cdot 10^2 \]

\[ (y \oplus z) \oplus x = 0.660 \cdot 10^4 = \text{fl}(x + y + z) \]

\[ (3.5) \text{: } \text{Nobels Fehler einer Operation ist im Rahmen von eps} \]

Frage: Fehlerpropagation im Algorithmus

\([-\) Stabilität des Algorithmus]
Algorithmus heißt stabil, falls die Fehler in der "Größenordnung" der inverenlichen Fehler liegen (Kondition des Problems)

Beispiel 3.6 (Auslöschung, $b=10$

\[ x = 0.73553 \quad y = 0.73441 \quad e_s = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} \]
\[ x - y = 0.00122 \]
\[ e = f_k(x) = 0.736 \quad \bar{y} = f_k(y) = 0.734 \]
$$|\delta x| = 0.500 \times 10^{-3}$$

$$|\delta y| = 0.500 \times 10^{-3}$$

$$\frac{\text{Left error} \left| (\bar{x} - \bar{y}) - (x - y) \right|}{x - y}$$

$$= \left| \frac{0.002 - 0.00122}{0.00122} \right| = 0.64$$

$$\gg \delta x, \delta y$$
Stimmen die folgenden Tiefen bei Subtraktion zwei Fehler überraschend steigt der Fehler im Resultat mit dem Faktor $5^t$

$\Rightarrow$ Subtraktion ähnliche große Zahlen ist instabil!