Kap. 4 Direkte numer. Verfahren zur Lsg. von lin. Gleich.systemen

Sehr vielfältige Anwendungen:
z.B. Diskretisierung von DGL
Lin. Ausgleichsrechnung
Lsg. nichtlin. Gleich.systeme
...

Betrachte $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$

hat für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutige Lsg.
$\Leftrightarrow$ A injektiv, d.h. $Ax = 0$ (homogenes System) nur trivial ($x = 0$) lösbar
$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = n$ (Vollrangbed.)
$\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ (A regulär)

§4.1 Kondition von LGS

Betrachte Norm $\|x\|$ auf $\mathbb{R}^n$ und zugeordnete Matrixnorm $\|A\|$ (Operatornorm), reguläre Matrix A.
Betrachte zunächst „Störungen" der rechten Seite $b + \Delta b$ von $Ax = b$.

<u>Satz 4.1</u> (Störungen in b)
Sei $x + \Delta x$ die Lsg. von $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$.
Dann gilt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

für Lsg. x von $Ax = b$

Bew.:

$$A(x+\Delta x) = b + \Delta b \Leftrightarrow A\Delta x = \Delta b \Leftrightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b$$

also $\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$.

Wg. $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

gilt $\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$.

Insgesamt
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \|\Delta x\| \cdot \frac{1}{\|x\|}$$
$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \frac{\|A\|}{\|b\|}$$
$$= \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Def. 4.2 (rel. Konditionszahl LGS)

$$\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Satz 4.3

Sei $\kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$. x Lsg. von $Ax = b$

$x+\Delta x$ Lsg. von $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b)$

Dann gilt:
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{\left(1-\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

Bem. 4.4: Im Rechner wg. Maschinenzahlen

$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}, \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leq eps$ $\rightarrow$ Fehler bei numer. LGS-Lsg. in Größenordnung $\kappa(A) \cdot eps$

Präkonditionierung:

Verbesserung der Matrixkondition durch

z.B. Zeilenskalierung $\quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

$$D_Z := \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

$$d_i := \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \Big)^{-1}$$

$$\mathcal{K}_\infty(D_Z A) \le \mathcal{K}_\infty(DA)$$

$\forall$ Diagonalmatrizen D

(Konditionsminimierung bzgl.

$\| \ \|_\infty$ - Norm)

§4.2 Numer. Lsg. von LGS: Gauß-Verfahren und LR-Zerlegung (Faktorisierung)

Naheliegende Variante „Cramersche Regel"

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

ungeeignet, da kombinatorische Komplexität (n! Operationen bei Anwendung Laplace'scher Entwicklungssatz).

- Beurteilung der Verfahren nach Effizienz (Rechenaufwand, Speicherbedarf) und Stabilität (Konditionsverstärkung) sowie Strukturausnutzung (bei großen Problemen)

Konzept aller numer. Verfahren zur Lsg. von LGS:

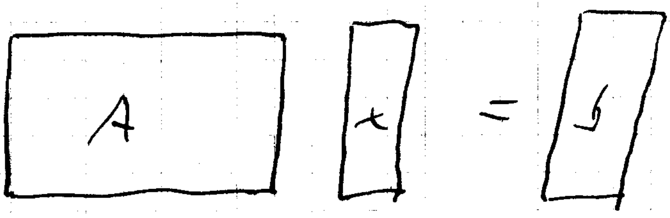
$$Ax = b \iff CAx = Cb$$

falls C regulär

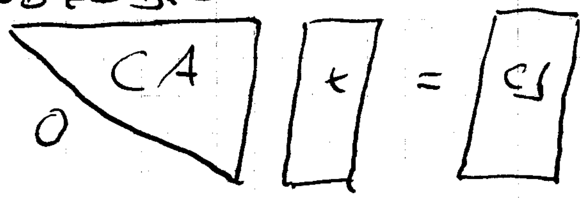
$CAx = Cb$ „leicht lösbar"

Ziel der LR-Zerlegung: Dreiecksmatrizen

$Ax = b$



obere Dreiecksmatrix



$\rightarrow$ Lsg. durch Rückwärtseinsetzen

Gauss´sches Eliminationsverfahren und *LR*-Zerlegung

$$Ax = b \qquad (\det A \neq 0)$$

$$A = A^{(1)}: \;\begin{array}{|ccccc|}\hline * & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline\end{array} \;\longrightarrow\; A^{(2)}: \;\begin{array}{|c|cccc|}\hline * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline\end{array} \;\longrightarrow\; A^{(3)}: \;\begin{array}{|cc|ccc|}\hline * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \hline\end{array}$$

a(j,j): Pivotelement, Annahme: a(j,j) ungleich 0 !

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassen:
$$(A \;\; b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{pmatrix}.$$

Durch die Gauß-Elimination ohne Pivotisierung wird dieses System überführt in

$$\underset{\substack{\ell_{2,1}=\frac{4}{2}\\ \ell_{3,1}=\frac{6}{2}\\ \ell_{4,1}=\frac{-2}{2}}}{\overset{j=1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{pmatrix} \underset{\substack{\ell_{3,2}=\frac{4}{2}\\ \ell_{4,2}=\frac{-6}{2}}}{\overset{j=2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\ell_{4,3}=\frac{10}{2}}{\overset{j=3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{pmatrix} = (R \;\; c).$$

Frobenius-Matrix

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \emptyset & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & \emptyset & \vdots & & \ddots & \\ & & -\ell_{n,k} & \emptyset & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{A = A^{(1)}}{\begin{array}{|ccccc|} \hline \ast & \ast & \cdots & \cdots & \ast \\ \ast & \ast & \cdots & \cdots & \ast \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \ast & \ast & \cdots & \cdots & \ast \\ \hline \end{array}} \longrightarrow \underset{A^{(2)}}{\begin{array}{|c|cccc|} \hline \ast & \ast & \cdots & \cdots & \ast \\ \hline 0 & \ast & \cdots & \cdots & \ast \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ast & \cdots & \cdots & \ast \\ \hline \end{array}} \longrightarrow \underset{A^{(3)}}{\begin{array}{|cc|ccc|} \hline \ast & \ast & \ast & \cdots & \ast \\ 0 & \ast & \ast & \cdots & \ast \\ \hline 0 & 0 & \ast & \cdots & \ast \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & \ast & \cdots & \ast \\ \hline \end{array}}$$

$$L_j A^{(j)} = A^{(j+1)}$$

$$\underbrace{L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 A}_{=A^{(n)} =: R} x = \underbrace{L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 b}_{=: c}$$

LR-Zerlegung

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} R =: LR$$

R: obere Dreiecksmatrix

$$L_1^{-1} L_2^{-1} \ldots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \ell_{2,1} & \ddots & \emptyset & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

L: untere Dreiecksmatrix

Achtung !

$$\begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Mit $\ell_{2,1} = 1/0.00031$ ergibt Gauß-Elimination

$$(R\ c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & 1 - \frac{1}{0.00031} & -7 - \frac{-3}{0.00031} \end{array}\right).$$

Bei 4-stelliger Rechnung würde sich daraus

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & -3225 & 9670 \end{array}\right)$$

ergeben. Rückwärtseinsetzen liefert dann

$$\tilde{x}_1 \approx -6.452, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.998.$$

Exakte Rechnung ergibt allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \quad x_2 = -2.998759\ldots,$$

Nach obigen Uberlegungen ist es also nicht sinnvoll, nur dann Gleichungen (Zeilen in der Matrix) zu vertauschen. wenn ein Nulleintrag dies erzwingt. Stattdessen setzt man *stets* bei der Berechnung der Matrix $A^{(j+1)}$ aus $A^{(j)}$ ein *betragsgrößtes* Element in der ersten Spalte der verbleibenden $(n-j+1)\times(n-j+1)$-Untermatrix an die (j,j)-Pivotposition. Da man das j-te Pivotelement in der j-ten Spalte sucht, nennt man diesen Vertauschungsvorgang *Spaltenpivotisierung*. Die Matrix sollte zuvor äquilibriert werden.

$$
\overset{A = A^{(1)}}{\boxed{\begin{array}{ccccc}
* & * & \cdots & \cdots & * \\
* & * & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
* & * & \cdots & \cdots & *
\end{array}}}
\;\longrightarrow\;
\overset{A^{(2)}}{\boxed{\begin{array}{c|cccc}
* & * & \cdots & \cdots & * \\
\hline
0 & * & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & * & \cdots & \cdots & *
\end{array}}}
\;\longrightarrow\;
\overset{A^{(3)}}{\boxed{\begin{array}{cc|ccc}
* & * & * & \cdots & * \\
0 & * & * & \cdots & * \\
\hline
0 & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(3)} & \vdots \\
0 & 0 & * & \cdots & *
\end{array}}}
$$

Spaltenpivotisierung

Permutationsmatrix

$$P_{i,k} \qquad\qquad P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^{(j)} := P_{\tau_j} A^{(j)} \qquad\qquad |\hat{a}_{j,j}^{(j)}| \geq \max_{i>j} |\hat{a}_{i,j}^{(j)}|$$

Satz 4.5 *Zu jeder nichtsingulären Matrix A existiert eine Permutationsmatrix P, eine (dazu) eindeutige untere normierte Dreiecksmatrix L, deren Einträge sämtlich betragsmäßig durch eins beschränkt sind, und eine eindeutige obere Dreiecksmatrix R, so daß*

$$PA = LR.$$

Die Matrizen P, L und R ergeben sich aus der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung.

Der Rechenaufwand für die LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt ca.

$$\frac{1}{3}n^3 \text{ Operationen.}$$

Die Skalierung (falls nötig) kostet nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

$$PA = LR$$

Die Lösung von

$$Ax = b$$

ergibt sich über die Lösung zweier Dreieckssysteme

$$\begin{aligned} Ax = b \iff PAx = Pb &\iff LRx = Pb \\ &\iff Ly = Pb \text{ und } Rx = y. \end{aligned}$$

Obere Dreiecksmatrix erhält man durch Gauß'sches Elim. verfahren

$\rightarrow$ Folien Gauss + LR-Zerlegung

§ 4.3 Cholesky-Zerlegung

Def. 4.6 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch pos. definit (s.p.d.), falls

$$A^T = A$$

$$\text{und} \quad x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

Satz 4.7 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s. pos. def., dann

a) A regulär und A^{-1} s.p.d.

b) A hat nur strikt pos. reelle Eigenwerte

c) A hat nur " " Diagonaleinträge und betragsgrößten Eintrag auf Diagonalen

$\rightarrow$ Gauss-Elim. ohne Pivoting möglich und „Symmetrieausnutzung":

wenn $L_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & \boxed{A^{(2)}} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$, dann

$$L_1 A L_1^T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A^{(2)}} \\ 0 & \end{pmatrix}. \text{ Daher}$$

Satz 4.8 Jede s.p.d. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eindeutige Zerlegung

$$A = L D L^T$$

mit Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_i)$ $i = 1, \dots, n$

$d_i > 0, \ i = 1, \dots, n$

§ 4.3 Cholesky-Zerlegung

Def. 4.6 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit (s.p.d.), falls

$$A^T = A$$

und $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Satz 4.7 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.p.d., dann

a) A regulär und A^{-1} s.p.d.

b) A hat nur strikt pos. Eigenwerte (reelle)

c) A hat nur strikt pos. Diagonaleinträge und der betragsgrößte Eintrag steht auf der Diagonalen

$\longrightarrow$ Gauss-Elimination (LR-Zerlegung) ist ohne Pivotisierung möglich und erlaubt Symmetrieausnutzung

wenn $L_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & \boxed{A^{(2)}} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$, dann

$$L_1 A L_1^T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & \boxed{\tilde{A}^{(2)}} & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Daher

<u>Satz 4.8</u>: Jede s.p.d. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$A = L \cdot D \cdot L^T$$

mit Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$

Cholesky-Verfahren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} LDL^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die elementweise Auswertung der Gleichung $LDL^T = A$, die man aufgrund der Symmetrie auf den unteren Dreiecksteil beschränken kann, ergibt

$j = 1$: (1,1)-Element: $d_{1,1} = a_{1,1} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d_{1,1} = 2}$

(2,1)-Element: $\ell_{2,1}d_{1,1} = a_{2,1} = 6 \quad \Longrightarrow \quad \ell_{2,1} = 6/2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ell_{2,1} = 3}$

(3,1)-Element: $\ell_{3,1}d_{1,1} = a_{3,1} = -2 \quad \Longrightarrow \quad \ell_{3,1} = -2/2$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\ell_{3,1} = -1}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ \ell_{2,1}d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ \ell_{3,1}d_{1,1} & \ell_{3,2}d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_{2,1} & \ell_{3,1} \\ 0 & 1 & \ell_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$j = 2$: (2,2)-Element: $\ell_{2,1}^2 d_{1,1} + d_{2,2} = a_{2,2} = 21 \quad \Longrightarrow \quad d_{2,2} = 21 - 3^2 * 2$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{d_{2,2} = 3}$$

(3,2)-Element: $\ell_{3,1}d_{1,1}\ell_{2,1} + \ell_{3,2}d_{2,2} = a_{3,2} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \ell_{3,2} = -(-1) * 2 * 3/3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ell_{3,2} = 2}$$

$j = 3$: (3,3)-Element: $\ell_{3,1}^2 d_{1,1} + \ell_{3,2}^2 d_{2,2} + d_{3,3} = a_{3,3} = 16$

$$\Longrightarrow \quad d_{3,3} = 16 - (-1)^2 * 2 - 2^2 * 3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d_{3,3} = 2}$$

$$\Longrightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man kann das Cholesky-Verfahren mit ca. $\frac{1}{6}n^3$ Multiplikationen und etwa ebenso vielen Additionen realisieren. Der Rechenaufwand beträgt also etwa die Hälfte des Aufwands der Standard-LR-Zerlegung.

Die Lösung des Problems $Ax = b$ reduziert sich

$$Ly = b, \quad DL^T x = y, \quad \text{d. h. } L^T x = D^{-1} y.$$

§ 4.4 Stabilität von LR-Zerlegung und Cholesky

Cholesky-Verfahren: Realisierung auf einem Rechner, man kann zeigen:

berechnete Lsg. $\bar{x}$ ist Lsg. eines (numerisch) gestörten Systems $(A + \Delta A)\bar{x} = b$

mit $\dfrac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq c_n \cdot eps$ (n: Matrixdimension) wg. Satz (4.3) gilt

$$\frac{\|x-\bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \underline{\mathcal{K}_\infty(A)} \cdot c_n \cdot eps$$

$\longrightarrow$ Cholesky ist stabil (da c_n „klein")

– LR-Zerlegung <u>mit Pivotisierung</u>

ist für moderat großen ebenfalls stabil, jedoch <u>nicht</u> ohne Pivotisierung