- geometrische Interpretation
  (Skalarprodukt, Orthogonalität)

Lösung von (5.2)

$$f(x) := \|Ax - b\|_2^2 = \langle Ax - b, Ax - b \rangle$$

$$= x^T A^T A x - 2 b^T A x + b^T b$$

notwendige Bed. für min $f(x)$:

$$\nabla f(x) = 2\left(A^T A x - A^T b\right) = 0$$

$$\iff A^T A x = A^T b \quad \text{(Normal(en)gleichung)}$$

(5.3)

Normalengleichung hat mind. eine Lösung

<u>Geometrie</u>:

Überbestimmtes LGS $Ax = b$ i.a. nicht lösbar, aber für x^* als Lsg. von (5.3) gilt:

$$Ax^* - b \perp \text{Bild}(A) \iff w^T(Ax^* - b) = 0$$
für alle $w \in \text{Bild}(A)$

$$\iff (Ay)^T(Ax^* - b) = 0$$
für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\iff y^T(A^T A x^* - A^T b) = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n$$

$$\iff A^T A x^* - A^T b = 0$$

Bemerkung 5.4

$\mathrm{rang}(A) = n \implies A^T A$ ist s.p.d.
und (5.3) hat eine
eindeutige Lsg.

$\rightarrow$ Numer. Lsg. von (5.3) ist möglich
mit Cholesky

aber:

- Berechnung von $A^T A$ für große m aufwendig
- ggf. schlechte Kondition
$$\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A) \cdot \kappa_2(A^T) = \kappa_2^2(A)$$

- Auslöschungseffekte möglich bei Berechnung von $A^T A$

Alternative:

$$x^* = \min \|Ax - b\|_2 \iff$$

$$x^* = \min \|Q(Ax - b)\|_2 \text{ für jede}$$

orthogonale Matrix Q

Satz 5.5

Sei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal, so dass

$$QA = R := \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ n \text{ Zeilen} \\ \}\ m-n \text{ Zeilen} \end{matrix}$$

mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ rechte obere Dreiecksmatrix, $\underline{\operatorname{rang}(A) = n}$!

$$Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ n \text{ Zeilen} \\ \}\ m-n \text{ Zeilen} \end{matrix},$$ dann gilt

$$x^* := \tilde{R}^{-1} b_1 \text{ ist Lsg. von } (5.2).$$

<u>Beweis</u>: Q regulär, $\operatorname{rang}(A) = n$

$\Rightarrow \tilde{R}$ regulär, da $\operatorname{rang}(\tilde{R}) = n$

Es gilt $\|Ax - b\|_2^2 = \|QAx - Qb\|_2^2$

$= \|Rx - Qb\|_2^2 = \|\tilde{R}x - b_1\|_2^2 + \underbrace{\|b_2\|_2^2}_{}$

unabhängig von x !

$$\Rightarrow x^* = \min_x \|Ax - b\|_2^2 = \min_x \|\tilde{R}x - b_1\|_2^2$$

$\Leftrightarrow \tilde{R}x^* = b_1$, da $\tilde{R}$ regulär!

Es folgt $\|Ax^* - b\|_2 = \|b_2\|_2$

Algorithmus zur Lsg. von (5.2):

1. QR-Zerlegung $QA = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$

   mit Householder-Transformation

2. Berechne $Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und löse

   $\tilde{R}x = b_1$ durch Rückwärtseinsetzen

Bsp.: Übungen

§ 5.1 Singulärwertzerlegung

Lösung der Normalengleichung (5.3)

für rang $A = n$

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b \,, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

für $m = n$: $\underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}$ $= A^{-1} \cdot (A^T)^{-1} A^T$

$$= A^{-1}$$

$A^+ := (A^T A)^{-1} A^T$ „spielt die Rolle" einer „Pseudoinversen" für $m > n$ und rang$(A) = n$

Fall $\operatorname{rang}(A) < n$?

Sei $\operatorname{rang}(A) = p < \min(m,n)$

$\underset{LA}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{Kern}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0 \}$

ist linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$

der Dimension $\dim \operatorname{kern}(A) = n - p > 0$

Darstellung der Lösungsmenge von (5.2)

$$L(b) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ Lsg. von } (5.2) \}$$

wg. (5.3) gilt $x, x' \in L(b)$:

$$A^T A(x - x') = A^T b - A^T b = 0$$

Es folgt

$$(x-x')^T A^T A\,(x-x') = \|A(x-x')\|_2^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow\ x - x' \in \mathrm{kern}(A)$$

also $L(b) = x + \mathrm{kern}(A) =$

$$\{x + y \mid Ay = 0\} \text{ für }$$

$$x \in L(b)$$

„Wähle" als Lsg. $x^* \in L(b)$ mit

" der kleinsten euklid. Norm

Dieses x^* lässt sich mit Hilfe der Pseudoinversen berechnen!

Satz 5.6 (Singulärwertzerlegung, SVD)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gibt es orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Diagonalmatrix $\Sigma := \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $p = \min(m, n)$ mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ so dass $U^T A V = \Sigma$.

Bemerkung 5.7

a) SVD verallgemeinert die Hauptachsen-transformation

b) Algorithmus zur SVD-Berechnung ist komplex (Bidiagonalisierung von A, ...), aber sehr stabil!

c) σ_i^2 sind genau die Eigenwerte der Matrix $A^T A$

d) $\operatorname{rang}(A) = r$, dann gilt $\sigma_1, \dots, \sigma_r > 0$ und $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_p = 0$

Def. 5.8

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, rang$(A) = r$, SVD von A:

$A = U \Sigma V^T$. Definiere

$A^+ := V \Sigma^+ U^T$ mit $\Sigma^+ := \mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}, 0, 0, 0)$

Satz 5.9

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$x^* := A^+ b$ die Lsg. von (5.2) mit

kleinster euklid. Norm.

§ 5.2 Kondition des lin. Ausgleichsproblems

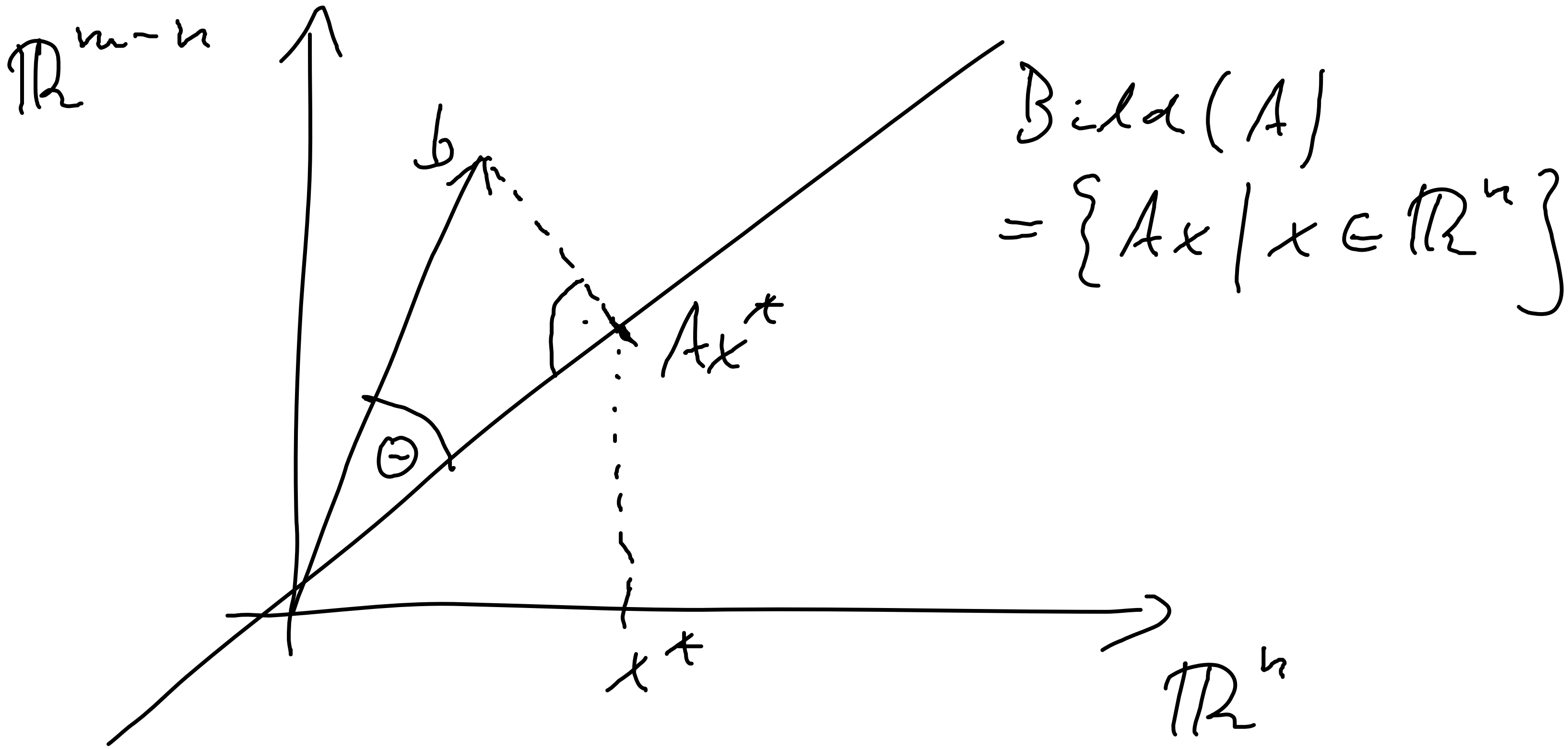
Satz 5.10 (Störungen in b)

Sei x^* Lsg. von $\min_x \|Ax-b\|_2^2$ und $\bar{x}$ Lsg. von $\min_x \|Ax-\bar{b}\|_2^2$.

Dann gilt:

$$\frac{\|\bar{x}-x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos\Theta} \cdot \frac{\|\bar{b}-b\|}{\|b\|_2}$$

$$\cos\Theta = \frac{\|Ax^*\|_2}{\|b\|_2}$$


$\mathbb{R}^{m-n}$
b
$\mathrm{Bild}(A)$
$= \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$
Θ
Ax^*
x^*
$\mathbb{R}^n$

Kap. 6 Nichtlineare Gleichungen und Fixpunkte

Betrachte nichtlin. Abbildung

$f : \Omega \, (\subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Aufgabe: Suche Nullstelle $f(x) = 0$

(6.1)

Idee der Fixpunktiteration:

$f(x^*) = 0 \iff x^* = x^* - M(x) f(x^*)$

mit regulärer Matrix $M(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Fixpunktproblem: suche x^* mit

$$x^* = \Phi(x^*), \quad \Phi(x) := x - R(x) \cdot f(x) \tag{6.2}$$

Ziel: Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\text{Startwert } x_0 \tag{6.3}$$

Wähle $R(x)$ so, dass (6.3) möglichst schnell konvergiert