Fixpunktproblem: suche x^* mit

$$x^* = \Phi(x^*), \quad \Phi(x) := x - \Omega(x) \cdot f(x) \tag{6.2}$$

Ziel: Iteration

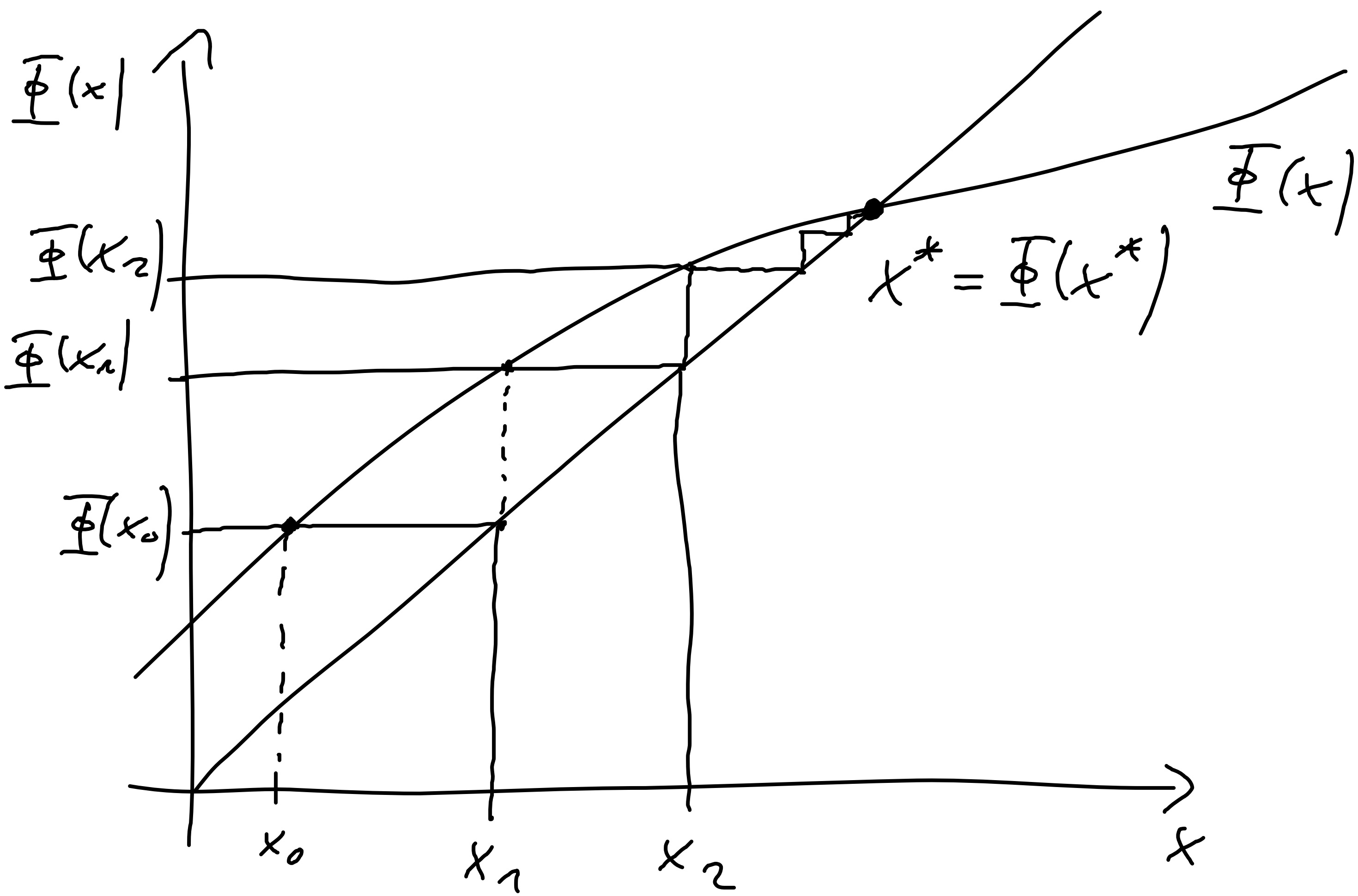
$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\text{Startwert } x_0 \tag{6.3}$$

Wähle $\Omega(x)$ so, dass (6.3) möglichst schnell konvergiert

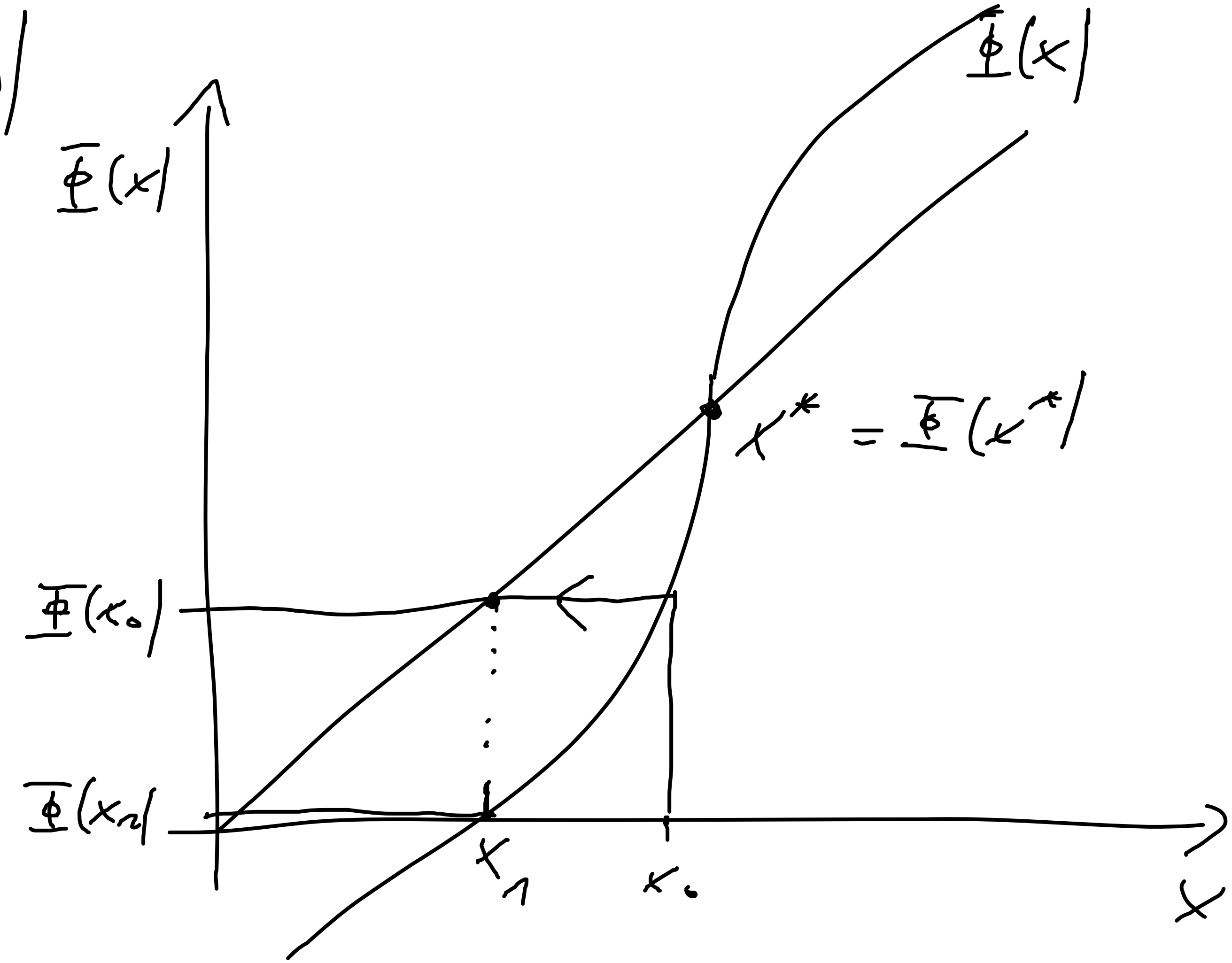
Beispiel 6.4

a)



„anziehender Fixpunkt"

b)



„abstoßender Fixpunkt"

„lokale Eigenschaften" des Fixpunktes x^* offenbar bestimmt durch $\Phi'(x^*)$.

Allgemeine Formalisierung
$\rightarrow$ Banach'scher Fixpunkt

<u>Satz 6.5</u>

Sei X normierter Vektorraum, $E \subset X$ sei vollständig und $\Phi : E \to E$ Selbstabbildung mit der Eigenschaft

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|, \text{ für alle } x, y \in E$$

$L < 1$ („kontraktion")

Dann gilt:

i) Es gibt in E genau einen Fixpunkt x^* mit $\Phi(x^*) = x^*$

ii) Für jedes $x_0 \in E$ gilt $\lim\limits_{k \to \infty} \Phi(x_k) = x^*$

iii) $$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

(a priori Fehlerschätzung)

iv) $$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$$

(a posteriori Fehlerschätzung)

Beweisidee:

Iterationsvorschrift (6.3) liefert wg. $L<1$ (Kontraktionseigenschaft) eine Cauchy-Folge der Iterierten x_k, die wg. der Vollständigkeit von E konvergiert ...

Bemerkung 6.6

Satz 6.5 liefert Existenz- und Eindeutigkeitsaussage in enger Verbindung mit konstruktivem Algorithmus zur Fixpunktberechnung.

Korollar 6.7 (siehe Abb. 6.4)

Sei $X = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$ und $\Phi : [a, b] \to [a, b]$ sei stetig differenzierbar in $[a, b]$ und es gelte $\max_{x \in [a,b]} \left| \Phi'(x) \right| =: L < 1$.

Dann sind die Voraussetzungen von Satz 6.5 erfüllt mit $\|\cdot\| = |\cdot|$.

Beweis: nach dem Mittelwertsatz der Diff. rechnung gilt:

$$\left| \Phi(x) - \Phi(y) \right| = \left| \Phi'(z) \cdot (x - y) \right|, \quad z \in [a, b]$$

$$\leq$$

$$\max_{z \in [a,b]} |\Phi'(z)| \cdot |x-y| = L \cdot |x-y|$$

$$L < 1$$

insgesamt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L\,|x-y|$$

$$L < 1$$

Verallgemeinerung:

Das gilt analog auch für $X = \mathbb{R}^n$ und

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| =: L < 1 .$$

Def. 6.8 (Konvergenzordnung)

$(X, \|\cdot\|)$ sei normierter Raum, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge mit $x_k \in X$, $x^* \in X$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Ordnung p gegen x^*, falls

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^p$$

$$0 < c < 1 \quad \text{für } p = 1$$

$$0 < c < \infty \quad \text{für } p > 1$$

$p = 1$: lineare Konvergenz

$p = 2$: quadratische Konvergenz

$p > 1$: superlineare "

Banach'scher Fixpunkt liefert

lineare Konvergenz.

§ 6.1 Skalare Nullstellenprobleme

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$

$a_0 < b_0 \Rightarrow$ es gibt mind. eine Nullstelle

von f in (a_0, b_0)

1. Berechnung der Nullstelle mit dem „Bisektionsverfahren"

Iteration:

$x_0 \in (a_0, b_0)$, $x_0 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$

$x_k := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$

$a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} = x_k$

(falls $f(x_k) f(a_k) \leq 0$)

$a_{k+1} := x_k$, $b_{k+1} = b_k$

(sonst)

Es gilt wg. Konstruktion

$$|b_k - a_k| = 2^{-k} |b_0 - a_0|$$

$$\Rightarrow |x^* - x_k| \leq \frac{1}{2} |b_k - a_k|$$

$$= 2^{-(k+1)} (b_0 - a_0)$$

$\rightarrow$ Halbierung des Fehlers pro Iteration:

Konvergenzordnung $p = 1$

2. Berechnung mit dem Newton-Verfahren

<u>Idee</u>: approximiere f lokal linear und bestimme Nullstelle der Tangente an graph(f)

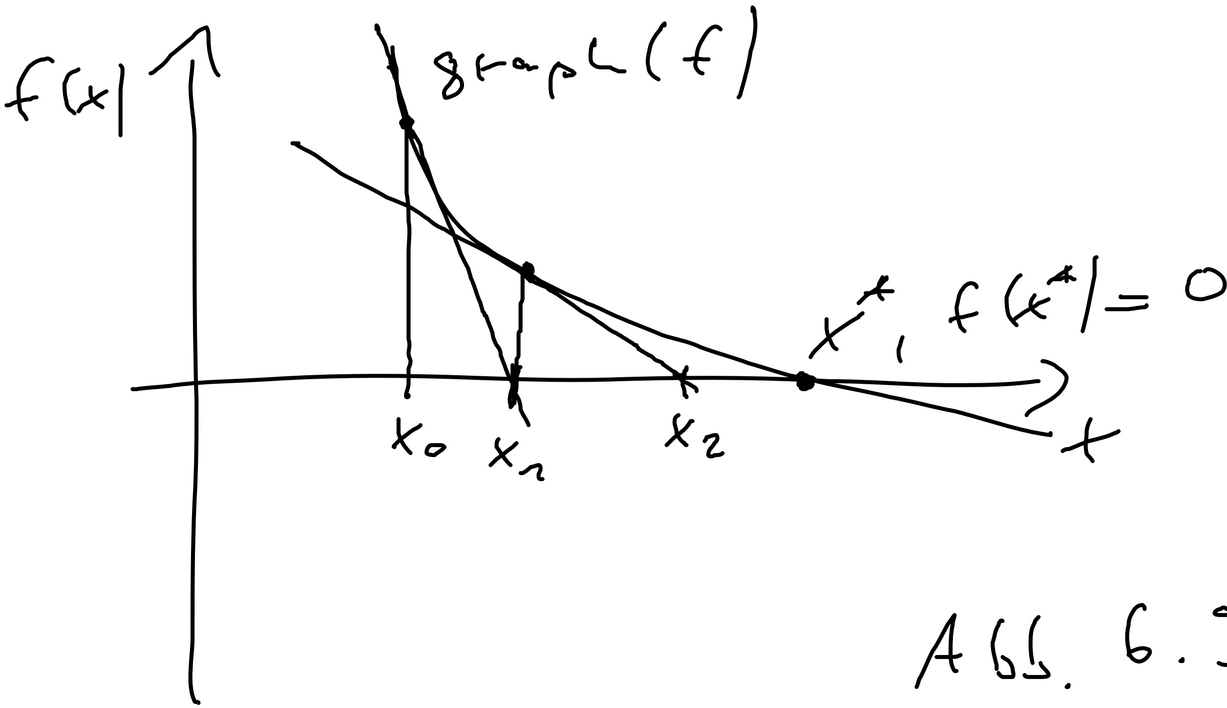


Abb. 6.3

Tangente in x_k:

$$T(x) := f(x_k) + (x - x_k) \cdot f'(x_k)$$

(Taylorreihe 1. Ordnung in x_k)

setze $T(x_{k+1}) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (6.10)$$

also $\Phi(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ in (6.3)

Satz 6.11 (Newton-Verfahren)

Sei f 2-mal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^*, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Dann gilt für $x_k \in U$ und Φ aus (6.10):

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2$$

$$z \in U$$

(d.h. Newton ist lokal quadratisch konvergent)

Beweis: mit Taylorentwicklung 2. Ordnung

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(z) \cdot (x - x_k)^2, \quad z \in U$$

einsetzen $x = x^*$:

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(z)(x^* - x_k)^2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{x_{k+1}}_{:= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2$$

Bemerkung 6.12

Wg. lokaler Konvergenz muss der Startwert x_0 für die Newton-Iteration in U liegen.

§ 6.2 Newton-Verfahren für Systeme

Sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 2-mal stetig diff.bar. In Analogie zu (6.10) konstruiert man über Taylorreihe 1. Ordnung:

$$\Phi(x) := x - \underbrace{\left(f'(x^k)\right)}_{\text{Jacobi-Matrix}}^{-1} f(x^k)$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Newton-Iteration:

löse LGS $f'(x^k)\, s^k = -f(x^k)$ (6.13)

(zur Vermeidung der Inversenberechnung)

setze: $x^{k+1} := x^k + s^k$

s^k: Newton-Korrektur

auch hier: lokal quadrat. Konvergenz

– Modifikationen des Newton-Verfahrens

1. vereinfachtes Newton-Verfahren:

ersetze $f'(x^k)$ in (6.13) durch

$f'(x^0)$

2. quasi-Newton Verfahren

approximiere $f'(x^k)$ über „Sekante"

durch zwei vorhergehende

Iterationspunkte (Broyden-Methode)

<u>Aber</u>: bei 1. und 2. geht quadrat.

Konvergenz verloren